Zakres rozszerzony

2

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

Matematyka

Podręcznik do liceów i techników
klasa 2.

2012
nowa podstawa programowa

OE

Zakres rozszerzony

2

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

Matematyka

Podręcznik do liceów i techników
klasa 2.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. Macieja Bryńskiego, prof. dr. hab. Tadeusza Stanisza, dr Ewy Ogłozy.
Zakres kształcenia: rozszerzony
Etap edukacyjny: IV
Typ szkoły: szkoły ponadgimnazjalne
Rok dopuszczenia: 2013

Numer dopuszczenia/Numer ewidencyjny w wykazie: 563/2/2013

Projekt okładki
Stefan Drewiczewski, FPstudio

Rysunki i łamanie
Eryk Krawczyński

Redaktor
Jan Baranowski

Zdjęcia: M. Kurczab (str. 186), BE&W (str. 188)
Mapa: Daunpol sp. z o.o. (str. 214)

Druk i oprawa

LCJ DYSTRYBUCJA

Wydanie I, Warszawa 2013 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
www.pazdro.com.pl
e-mail: pazdro@pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-090-9

Spis treści

Wstęp

Materiał zamieszczony w tym podręczniku jest kontynuacją i rozwinięciem zagadnień matematycznych przedstawionych w podręczniku do klasy pierwszej. Rozpoczynamy od omówienia własności funkcji liniowej i kwadratowej. Następnie systematyzujemy i rozszerzamy informacje dotyczące własności czworokątów oraz sposobów obliczania pól czworokątów. Kolejne rozdziały dotyczą wielomianów, ułamków algebraicznych i funkcji wymiernych. W tych rozdziałach omawiamy m.in. sposoby rozwiązywania prostych równań wielomianowych i wymiernych. Następny rozdział dotyczy ciągów (głównie arytmetycznych i geometrycznych). Poruszamy w nim również zagadnienia dotyczące ciągów nieskończonych. Ostatni rozdział poświęcony jest funkcjom trygonometrycznym zmiennej rzeczywistej.

Omawiając powyższe zagadnienia, dużą wagę przywiązujemy do przykładów prezentujących zastosowanie matematyki w rozwiązywaniu problemów praktycznych.

Każdy temat w podręczniku kończą zadania (poprzedzone tytułem *Sprawdź, czy rozumiesz*) do samodzielnego rozwiązania.

Na końcu podręcznika znajdują się odpowiedzi do większości zadań i skorowidz ważniejszych terminów występujących w podręczniku.

Autorzy

1. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta

Przykład 1.

Załóżmy, że cena jednego kilograma cukru wynosi 4 zł 60 gr. Zaobserwujemy, jak zmienia się koszt zakupów w zależności od ilości zakupionego cukru. Pokazuje to poniższa tabela:

liczba kg cukru	x	1	2	3	4	5	6
koszt zakupu w zł	y	4,60	9,20	13,80	18,40	23	27,60

Zależność między kosztem zakupu a liczbą kilogramów cukru wyraża wzór:

$y = 4{,}6 \cdot x,$

gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Zauważ, że koszt zakupu (y) i liczba kilogramów zakupionego cukru (x) zmieniają się w tym samym stosunku, np. trzykrotny wzrost liczby kilogramów pociąga za sobą trzykrotny wzrost kosztu zakupu. Stały stosunek kosztu zakupu (y) do liczby kilogramów zakupionego cukru (x) wyraża cenę 1 kg cukru, czyli 4,6 (zł).

Przykład 2.

Rowerzysta postanowił, że pewien odcinek trasy przejedzie ze stałą prędkością 12 km/h. Jak będzie zmieniała się długość przebytej drogi, jeśli rowerzysta na ten eksperyment przeznaczył 4 godziny?

Długość przebytej drogi przy stałej prędkości jazdy zależy od czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, i wyraża się wzorem:

$s = v \cdot t$, czyli $s = 12 \cdot t$,

gdzie s – długość drogi w km, t – czas jazdy w godzinach, $t \in (0, 4\rangle$.
Zauważ, że tym razem długość przebytej drogi (s) i liczba godzin jazdy (t) zmieniają się w tym samym stosunku. Stały stosunek długości przebytej drogi (s) do liczby godzin jazdy (t) wyraża wartość prędkości jazdy, czyli 12 (km/h).

Jeśli dwie wielkości zmieniają się w tym samym stosunku, to mówimy, że te dwie wielkości są wprost proporcjonalne.

Definicja 1.

Proporcjonalnością prostą nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi y, x, określoną wzorem $y = a \cdot x$, gdzie a jest liczbą różną od zera, zwaną **współczynnikiem proporcjonalności**.

W przykładzie 1. koszt zakupu jest wprost proporcjonalny do liczby kilogramów zakupionego cukru, a współczynnik proporcjonalności 4,60 (zł) oznacza stałą cenę 1 kg cukru.
W przykładzie 2. długość drogi jest wprost proporcjonalna do czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, a współczynnikiem proporcjonalności jest stała prędkość rowerzysty 12 (km/h).

Przykład 3.

a) Rozważmy trójkąty równoboczne. Długość boku trójkąta oznaczmy przez x, zaś jego obwód przez y. Czy obwód trójkąta i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi? Jeśli tak, to jaki jest współczynnik proporcjonalności?

b) Niech x oznacza długość boku kwadratu, natomiast y – pole kwadratu o boku x. Czy pole kwadratu i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

Ad a) Zależność między obwodem trójkąta równobocznego a długością jego boku wyraża wzór:

$y = 3x$, gdzie $x > 0$

Zauważmy, że stosunek obwodu trójkąta do długości jego boku jest stały i wynosi 3. Liczba 3 – oznaczająca liczbę boków trójkąta – jest wielkością stałą. Jest to współczynnik proporcjonalności.

Ad b) Pole kwadratu w zależności od długości boku kwadratu wyraża się wzorem

$y = x^2$, gdzie $x > 0$

Zauważmy, że pole kwadratu nie jest wprost proporcjonalne do długości boku kwadratu. Na przykład kwadrat o boku 3 ma pole równe 9, zatem $\frac{9}{3} = 3$; zaś kwadrat o boku 8 ma pole równe 64, zatem $\frac{64}{8} = 8$. Stosunek pola kwadratu do długości jego boku nie jest stały.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Miary x, y pewnych zmiennych wielkości X, Y są podane w tabelce. Czy wartości x i y są wprost proporcjonalne? Jeśli tak, to podaj współczynnik proporcjonalności i napisz wzór opisujący zależność zmiennej y od zmiennej x.

x	1,5	2	2,5	3
y	4,5	6	7,5	9

2. Rozważmy trójkąty o stałej wysokości h równej 4. Napisz wzór funkcji, która opisuje, jak zmienia się pole trójkąta w zależności od długości podstawy a, na którą opuszczona jest wysokość h. Naszkicuj wykres tej funkcji, jeśli $a \in \langle 1, 3 \rangle$.

Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej

Definicja 1.
Funkcją liniową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi; a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, b – wyrazem wolnym. Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Przez dwa różne punkty płaszczyzny przechodzi tylko jedna prosta. Żeby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy więc wyznaczyć dwa punkty należące do jej wykresu, następnie poprowadzić przez nie prostą.

Zauważ, że dla argumentu 0 wartość funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest równa b:

$f(0) = a \cdot 0 + b = b$

Zatem prosta będąca wykresem funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.
Obliczmy również wartość funkcji f dla argumentu 1:

$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$

Otrzymaliśmy, że punkt $(1, a + b)$ też należy do wykresu funkcji f.

Prawdziwe jest twierdzenie.

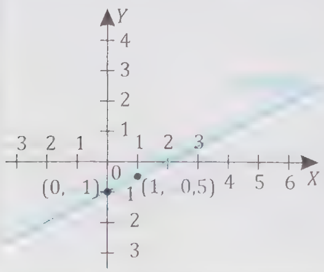
Twierdzenie 1.
Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, jest prosta przechodząca przez punkty $(0, b)$ i $(1, a + b)$.

Przykład 1.

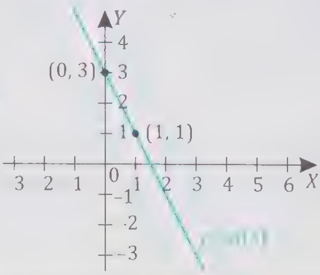
Naszkicujemy wykresy funkcji liniowych:

1) $f(x) = 0{,}5x - 1$ 2) $g(x) = -2x + 3$ 3) $h(x) = 2$ $(a = 0)$

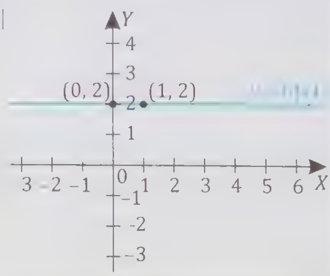
1) Wykresem funkcji liniowej $f(x) = 0{,}5x - 1$ jest prosta wyznaczona przez punkty $(0, -1)$ i $(1, -0{,}5)$.



2) Wykresem funkcji liniowej $g(x) = -2x + 3$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, 3)$ i $(1, 1)$.



3) Wykresem funkcji liniowej $h(x) = 0x + 2$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, 2)$ i $(1, 2)$.



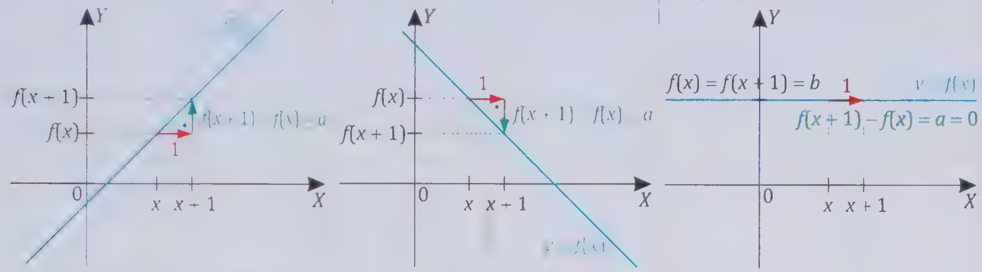
Obliczmy teraz różnicę wartości poszczególnych funkcji liniowych z przykładu 1. dla argumentów 1 i 0:

$f(1) - f(0) = -0{,}5 - (-1) = 0{,}5$
$g(1) - g(0) = 1 - 3 = -2$
$h(1) - h(0) = 2 - 2 = 0$

Każda różnica jest równa współczynnikowi kierunkowemu danej funkcji liniowej! Okazuje się, że dla dowolnego argumentu x funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost" wartości funkcji równy a:

$f(x+1) - f(x) = a \cdot (x+1) + b - (ax+b) = ax + a + b - ax - b = a$

1) $f(x) = ax + b,\ a > 0$	2) $f(x) = ax + b,\ a < 0$	3) $f(x) = ax + b,\ a = 0$



Ad 1) W przypadku, gdy $a > 0$, „przyrost" wartości funkcji jest dodatni. Znaczy to, że wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości funkcji – zatem funkcja jest rosnąca.

Ad 2) W przypadku, gdy $a < 0$, „przyrost" wartości funkcji jest ujemny. Znaczy to, że wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji – zatem funkcja jest malejąca.

Ad 3) W przypadku, gdy $a = 0$, „przyrost" wartości funkcji wynosi 0, co znaczy, że funkcja jest stała.

Wnioskowanie zaprezentowane powyżej jest prawdziwe tylko w przypadku funkcji liniowej.

Twierdzenie 2.
Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest:
a) rosnąca wtedy, gdy $a > 0$
b) malejąca wtedy, gdy $a < 0$
c) stała wtedy, gdy $a = 0$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $y = (5 - m)x + 3$ jest malejąca.

Funkcja liniowa jest malejąca wtedy, gdy jej współczynnik kierunkowy $(5 - m)$ jest ujemny. Otrzymujemy:

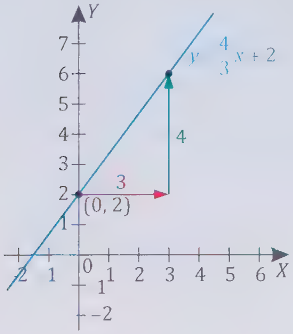
$5 - m < 0$, czyli $5 < m$.

Funkcja jest malejąca wtedy, gdy $m \in (5, +\infty)$.

W kolejnym przykładzie pokażemy, jak wykorzystać współczynnik kierunkowy, rozumiany jako „przyrost" wartości funkcji, do naszkicowania wykresu funkcji liniowej.

Przykład 3.

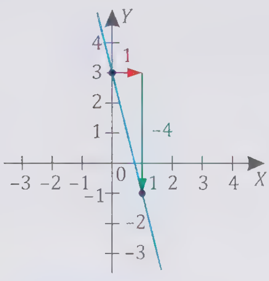
Naszkicujemy wykres funkcji liniowej $y = \frac{4}{3}x + 2$.



Najpierw wyznaczamy punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY. Bez trudu zauważamy, że jest to punkt o współrzędnych $(0, 2)$.
Wiemy, że wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost" wartości funkcji równy $\frac{4}{3}$. Zatem proporcjonalnie „przyrost" argumentu o 3 powoduje „przyrost" wartości funkcji o 4 (trzykrotnie większy przyrost argumentu powoduje trzykrotnie większy „przyrost" wartości). To spostrzeżenie pozwala wyznaczyć drugi punkt należący do wykresu funkcji: $(0+3, 2+4)$, czyli $(3, 6)$.
Wykres funkcji przedstawia rysunek powyżej.

Przykład 4.

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Na podstawie tego wykresu napiszemy wzór funkcji.



Wzór funkcji liniowej ma postać $y = ax + b$. Odczytujemy z rysunku współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY: $(0, 3)$, zatem wyraz wolny jest równy 3,

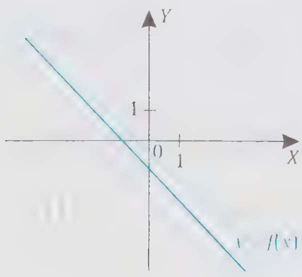
$b = 3$.

Odliczamy „przyrost" wartości funkcji dla przyrostu argumentu równego 1; otrzymujemy -4, więc $a = -4$.
Wzór funkcji przedstawionej na wykresie to

$y = -4x + 3$.

Przykład 5.

Określimy znaki współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, wiedząc, że wykres funkcji f przechodzi przez drugą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych.



Prosta, która przechodzi przez trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych, przecina oś OY w punkcie leżącym poniżej punktu $(0, 0)$. Zatem

$b < 0$

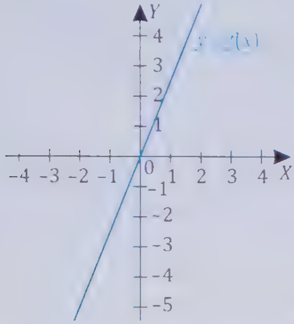
(patrz rysunek obok). Wykres funkcji przechodzi również przez II ćwiartkę. Zatem funkcja f jest malejąca. Stąd

$a < 0$.

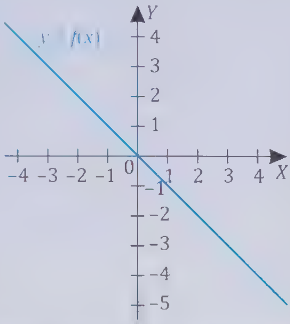
Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych wtedy, gdy współczynniki a i b są ujemne.

Na koniec tego tematu zastanówmy się, jak są położone w układzie współrzędnych wykresy funkcji liniowych opisanych równaniami mającymi postać $y = ax$ (wówczas $b = 0$). Przeanalizujmy przykłady:

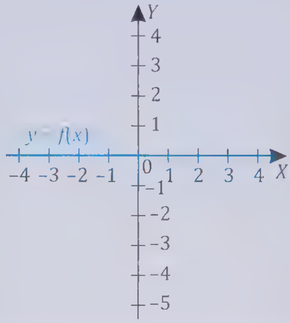
a) $f(x) = 2{,}5x$



b) $f(x) = -x$



c) $f(x) = 0$



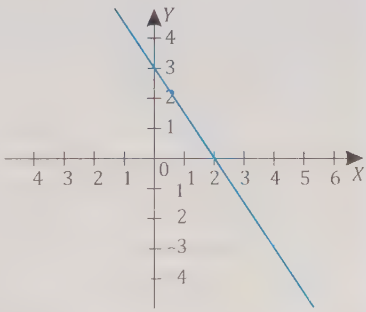
Jeśli $a > 0$, wówczas prosta przechodzi przez I i III ćwiartkę układu współrzędnych; jeśli $a < 0$, to prosta przechodzi przez II i IV ćwiartkę, natomiast w przypadku, gdy $a = 0$, wykres funkcji pokrywa się z osią OX.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykresy funkcji liniowych:

   a) $y = 5x + 1$ b) $y = -2x + 6$ c) $y = \frac{2}{3}x - 4$

2. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Odczytaj wartości współczynników i napisz wzór tej funkcji.



3. Punkty A i B należą do wykresu funkcji liniowej. Podaj wzór tej funkcji, jeśli:

   a) $A(0, 0)$ $B(2, -8)$ b) $A(0, 5)$, $B(1, 3)$
   c) $A(3, 0)$, $B(0, -7)$ d) $A(-4, 0)$, $B(-6, -1)$

4. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (3 + m)x - m + 2$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których:

   a) wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 7)$ b) funkcja jest rosnąca.

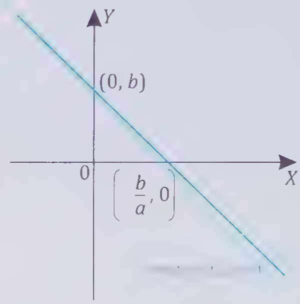
Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej

Wiesz już, że wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta przecinająca oś OY w punkcie $(0, b)$. Wyznaczymy teraz współrzędne punktu przecięcia wykresu tej funkcji z osią OX. W tym celu obliczymy miejsce zerowe funkcji, czyli argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

$$y = 0$$
$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$

Jeśli $a \neq 0$, to otrzymujemy

$$x = -\frac{b}{a}$$



Oznacza to, że jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe, równe $-\frac{b}{a}$. Wykres funkcji przecina oś OX w punkcie o współrzędnych

$$\left(-\frac{b}{a},\ 0\right)$$

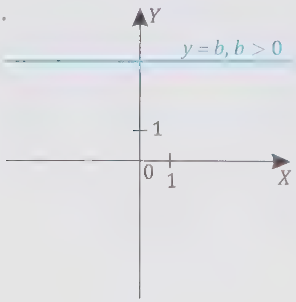
Rozpatrzmy przypadek, gdy $a = 0$. Wówczas wzór funkcji liniowej ma postać

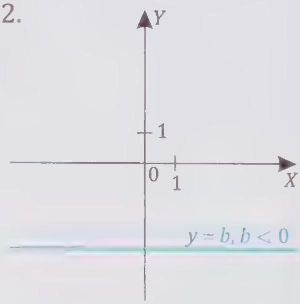
$$y = b$$

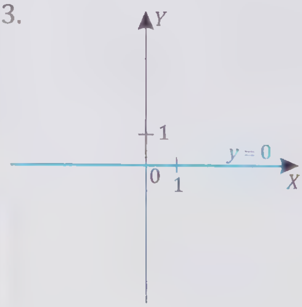
Jeśli $b \neq 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych. Jej wykres nie przecina się z osią OX, bo jest do niej równoległy (rysunek 1. i 2. poniżej).
Jeśli $b = 0$, to funkcję opisuje wzór

$$y = 0$$

Wykres funkcji pokrywa się z osią OX. Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje wartość zero. Miejscem zerowym tej funkcji jest każda liczba rzeczywista (rysunek 3. poniżej).

1.


2.


3.


Twierdzenie 1.

1) Funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe $-\frac{b}{a}$ wtedy, gdy $a \neq 0$.
2) Funkcja liniowa $y = ax + b$ nie ma miejsc zerowych wtedy, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.
3) Miejscem zerowym funkcji liniowej $y = ax + b$ jest każda liczba rzeczywista wtedy, gdy $a = b = 0$.

Przykład 1.

Wyznaczymy współczynniki a i b we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$, wiedząc, że jej wykres przecina osie układu współrzędnych w punktach o współrzędnych $(0, -4)$ i $(3, 0)$.

Zauważamy, że prosta będąca wykresem danej funkcji nie jest równoległa do osi OX. Na podstawie współrzędnych danych punktów otrzymujemy

$$b = -4 \quad \text{oraz} \quad -\frac{b}{a} = 3$$

Obliczamy a.

$$-\frac{-4}{a} = 3$$

$$4 = 3a, \text{ czyli } a = \frac{4}{3}.$$

Szukane współczynniki to: $a = \frac{4}{3}$, $b = -4$.

Przykład 2.

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 6$. Wyznaczymy wartość m tak, aby miejscem zerowym funkcji f była liczba -2.

Liczba -2 jest miejscem zerowym funkcji, to znaczy, że $f(-2) = 0$. Zatem

$$(m - 1) \cdot (-2) + 6 = 0, \quad \text{skąd}$$
$$-2m + 2 + 6 = 0, \quad \text{czyli}$$
$$-2m = -8$$
$$m = 4$$

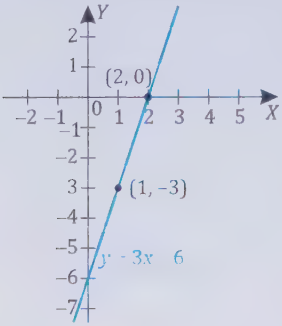
Jeśli $m = 4$, to miejscem zerowym funkcji jest liczba -2.

Przykład 3.

Funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x \in (2, +\infty)$; ponadto dla argumentu 1 przyjmuje wartość -3. Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Wzór funkcji liniowej ma postać $y = ax + b$. Obliczymy a i b.
Zastanówmy się nad położeniem prostej, będącej wykresem szukanej funkcji, w układzie współrzędnych. Wiadomo, że punkt $(1, -3)$ należy do tej prostej. Wiemy też, że do prostej należą tylko takie punkty mające drugą współrzędną dodatnią,

których pierwsza współrzędna jest większa od 2. Zatem prosta przecina oś OX w punkcie $(2, 0)$.



Znając współrzędne punktów $(1, -3)$ i $(2, 0)$, odczytujemy, że wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost” wartości funkcji o 3. Znamy więc a.

$$a = 3$$

Szukany wzór funkcji przyjmuje postać $y = 3x + b$. Pozostaje obliczyć współczynnik b. Podstawiamy do wzoru funkcji współrzędne punktu $(1, -3)$ lub punktu $(2, 0)$:

$$-3 = 3 \cdot 1 + b, \quad \text{stąd}$$
$$b = -6$$

Wzór funkcji liniowej to $y = 3x - 6$.

Przykład 4.

Dana jest funkcja liniowa $y = \left(4 - m^2\right)x + (m - 2)$. Sprawdzimy, czy istnieje liczba m, dla której ta funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Przyjmijmy oznaczenia współczynników we wzorze funkcji:

$$a = 4 - m^2 \quad \text{i} \quad b = m - 2$$

Funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$. Zauważamy, że $b = 0$ tylko wtedy, gdy $m = 2$. Wystarczy wobec tego sprawdzić, jaką wartość ma współczynnik a, jeśli $m = 2$.

$$a = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$

Funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych tylko wtedy, gdy $m = 2$.

Przykład 5.

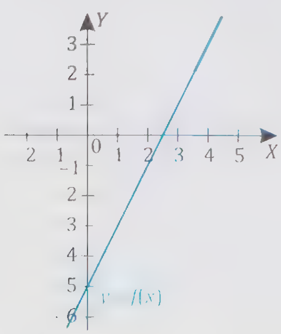
Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 2x - 5$.

a) Wyznaczymy jej miejsce zerowe, naszkicujemy wykres i na podstawie wykresu omówimy jej własności.

b) Rozwiążemy nierówność $f(x + 1) \geqslant 4x + 7$.

Ad a) Miejsce zerowe funkcji obliczymy, jeśli rozwiążemy równanie $f(x) = 0$, czyli

$$2x - 5 = 0, \quad \text{więc} \quad 2x = 5, \quad \text{zatem} \quad x = 2{,}5.$$



Własności funkcji f:

1) $D_f = \boldsymbol{R}$.
2) $ZW_f = \boldsymbol{R}$.
3) Miejscem zerowym jest liczba 2,5.
4) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2{,}5, +\infty)$.
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2{,}5)$.
5) Funkcja jest rosnąca.
6) Funkcja jest różnowartościowa.
7) Funkcja nie przyjmuje ani wartości największej, ani najmniejszej.

Ad b) Aby wyznaczyć wyrażenie $f(x+1)$, wystarczy w miejsce x wyrażenia
$2x-5$ wstawić $x+1$.

Otrzymujemy wówczas

$2(x+1)-5$

Rozwiązujemy nierówność

$f(x+1) \geqslant 4x+7$

$2(x+1)-5 \geqslant 4x+7$

$2x+2-5 \geqslant 4x+7$

$2x-3 \geqslant 4x+7 \quad / +3-4x$

$-2x \geqslant 10 \quad / : (-2)$ (dzielimy stronami przez liczbę ujemną, więc zmieniamy znak nierówności na przeciwny)

$x \leqslant -5$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty, -5\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz miejsce zerowe funkcji liniowej f. Następnie podaj zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, oraz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji są ujemne.
   a) $f(x) = 3x+6$ b) $f(x) = -0{,}6x+15$

2. Wykres funkcji liniowej f przecina oś OY w punkcie $(0, -4)$, a wartości ujemne funkcja przyjmuje tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 5)$. Wyznacz wzór funkcji f.

3. Naszkicuj wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -0{,}5x+5$. Na podstawie tego wykresu omów własności funkcji f.

4. Dany jest wzór funkcji liniowej $f(x) = -x+2$.
   a) Korzystając z wykresu funkcji $y = f(x-1)$, podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x-1) \leqslant 4$.
   b) Rozwiąż algebraicznie nierówność $f(x+3) > -f(2x)$.

5. Funkcja liniowa f jest określona za pomocą wzoru $f(x) = (m+5)x-3m$. Wyznacz wartości parametru m, dla których:
   a) miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2
   b) funkcja jest rosnąca
   c) wykres przechodzi tylko przez I i II ćwiartkę układu współrzędnych.

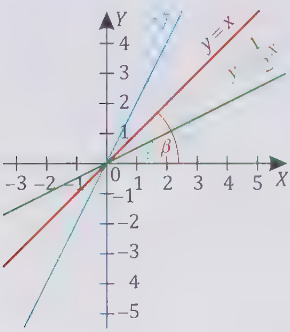
6. Funkcję liniową g opisuje wzór $g(x) = 3x+5-2m$. Wyznacz wartości parametru m, dla których:
   a) wykres funkcji g przecina oś OY poniżej punktu o współrzędnych $(0, 7)$
   b) miejsce zerowe funkcji g jest liczbą większą od 1.

Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej

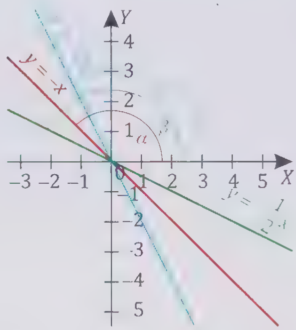
Wiesz już, że współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ określa „przyrost” wartości funkcji przy wzroście argumentu o 1, natomiast wyraz wolny b wyznacza punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY. Zastanowimy się teraz, jak jeszcze można interpretować te współczynniki. Zaczniemy od współczynnika kierunkowego a.

Rozważymy wykresy funkcji liniowych $y = ax$ wtedy, gdy $a > 0$, $a < 0$ oraz $a = 0$. Rysunki poniżej przedstawiają przykładowe wykresy takich funkcji.

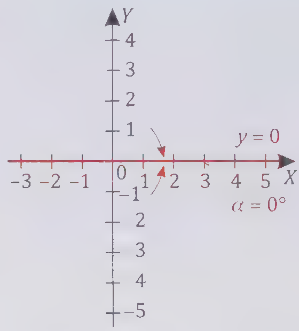
1) $a > 0$



2) $a < 0$



3) $a = 0$



Każdemu wykresowi odpowiada pewien kąt. Jest to tzw. **kąt nachylenia** wykresu funkcji liniowej do osi OX. Jedno ramię takiego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX, a drugie ramię leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych i zawiera się w danym wykresie.

Zauważmy, że:

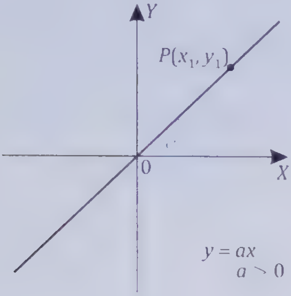
- jeśli $a > 0$, to kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest kątem ostrym;
- jeśli $a < 0$, to kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest kątem rozwartym;
- jeśli $a = 0$, to przyjmujemy, że kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest równy $0°$.

Łatwo zauważyć, że współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ ma związek z kątem nachylenia wykresu tej funkcji do osi OX. Dlatego współczynnik kierunkowy nazywamy też **współczynnikiem kątowym**.

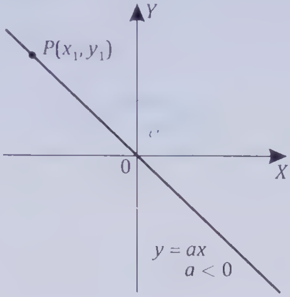
Pokażemy, że współczynnik kierunkowy (kątowy) jest równy tangensowi kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX.

Rozważmy ponownie wykresy funkcji liniowych $y = ax$.

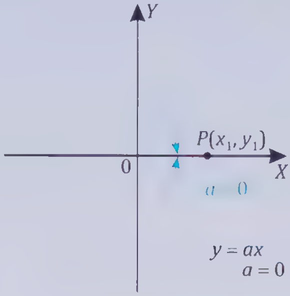
1.



2.



3.



Na drugim ramieniu kąta α nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX, wybieramy dowolny punkt $P(x_1, y_1)$ różny od punktu $(0, 0)$. Na podstawie definicji tangensa otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

Wiemy także, że punkt $P(x_1, y_1)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax$, więc współrzędne punktu P spełniają wzór funkcji, czyli $y_1 = ax_1$. Stąd

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{ax_1}{x_1} = a$$

Udowodniliśmy twierdzenie:

Twierdzenie 1.
Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax$ jest nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Przykład 1.

Napiszemy wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i nachylona do osi OX pod kątem $60°$.

Ponieważ prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc jej wzór ma postać

$$y = ax$$

Współczynnik a jest równy tangensowi kąta nachylenia wykresu funkcji do osi OX, czyli

$$a = \operatorname{tg} 60°,$$

skąd

$$a = \sqrt{3}$$

Funkcję liniową opisuje wzór $y = \sqrt{3}x$.

Przykład 2.

Wyznaczymy kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej $y = -x$ do osi OX.

Współczynnik kierunkowy we wzorze funkcji jest równy -1, zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = -1,$$

gdzie α jest kątem nachylenia wykresu funkcji do osi OX. Z własności tangensa wiadomo, że

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 \text{ i } -\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta),$$

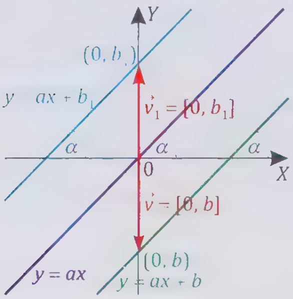
więc

$$-1 = -\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{tg} 135^\circ,$$

zatem

$$\alpha = 135^\circ$$

Wykres funkcji liniowej $y = -x$ jest nachylony do osi OX pod kątem 135°.



Zauważmy, że wykres funkcji liniowej

$$y = ax + b$$

powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji liniowej

$$y = ax \text{ o wektor } \vec{v} = [0, b].$$

Proste będące wykresami funkcji liniowych

$$y = ax \quad \text{oraz} \quad y = ax + b$$

są równoległe, a więc nachylone do osi OX pod tym samym kątem.
Ilustruje to rysunek obok.

Prawdziwe jest twierdzenie, które podsumowuje nasze rozważania.

> **Twierdzenie 2.**
> Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, jest prosta nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Przykład 3.

Napiszemy wzór funkcji liniowej, do wykresu której należą punkty $A\left(\sqrt{3}, -3\right)$ oraz $B(0, -4)$. Następnie ustalimy kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX.

Zauważamy, że punkt $B(0, -4)$ to punkt wspólny wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ i osi OY, zatem

$$b = -4$$

Wzór funkcji ma więc postać

$$y = ax - 4$$

Punkt $A\left(\sqrt{3}, -3\right)$ należy do wykresu funkcji, więc

$-3 = a \cdot \sqrt{3} - 4$

$a \cdot \sqrt{3} = 1$

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, czyli $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wzór szukanej funkcji to $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$.

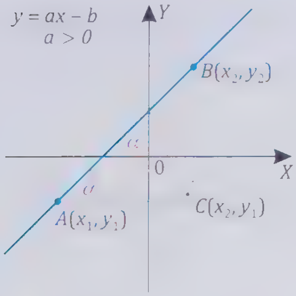
Prosta będąca wykresem funkcji nachylona jest do osi OX pod kątem α takim, że

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd

$\alpha = 30°$

Zastanowimy się teraz, jak obliczyć wartość współczynnika kierunkowego na podstawie współrzędnych dwóch dowolnych punktów należących do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$, bez wyznaczania wzoru tej funkcji.

Niech dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Zauważ, że $x_1 \neq x_2$ (jeśli $x_1 = x_2$, to punkty A i B leżą na prostej prostopadłej do osi OX, która nie jest wykresem żadnej funkcji). Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy dwóch funkcji liniowych, do których należą punkty A i B (pierwszy wykres jest nachylony do osi OX pod kątem ostrym, drugi wykres jest nachylony do osi OX pod kątem rozwartym).

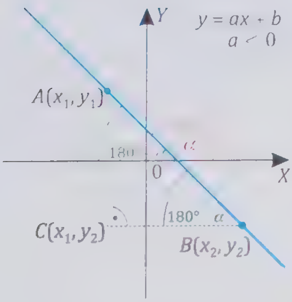


Rozpatrujemy trójkąt prostokątny ACB, gdzie $C(x_2, y_1)$. Kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX jest równy α, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$.

Ponieważ $AC \parallel OX$, więc $|\sphericalangle BAC| = \alpha$.

Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym mamy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Rozpatrujemy trójkąt prostokątny ABC, gdzie $C(x_1, y_2)$. Kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX jest równy α, gdzie $\alpha \in (90°, 180°)$. Zatem $|\sphericalangle CBA| = 180° - \alpha$, gdzie $\sphericalangle CBA$ jest kątem ostrym.

Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym mamy:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right), \text{ ale}$$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, zatem

$$-\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ skąd } \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Tak więc $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ i $\operatorname{tg}\alpha = a$ (na mocy twierdzenia 2.), a stąd

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jeśli $y_2 = y_1$, to znaczy, że funkcja liniowa jest stała (współczynnik kierunkowy a jest równy zeru). Mamy również: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$, więc i w tym przypadku $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Zauważmy też, że

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

zatem nie jest istotne uporządkowanie punktów A, B na prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$.

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Jeśli dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$, to

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Przykład 4.

Napiszemy wzór funkcji liniowej, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty $A(-4; -3{,}3)$ oraz $B(-7; 5{,}7)$.

Szukany wzór ma postać

$$y = ax + b$$

Najpierw wyznaczamy współczynnik kierunkowy a (korzystamy z twierdzenia 3.).

$$a = \frac{5{,}7 - (-3{,}3)}{-7 - (-4)} = \frac{9}{-3} = -3$$

Zatem szukany wzór przyjmuje postać

$$y = -3x + b$$

Wiemy, że punkt $A(-4; -3{,}3)$ należy do wykresu, więc jego współrzędne spełniają wzór funkcji. Otrzymujemy równanie z niewiadomą b:

$$-3{,}3 = -3 \cdot (-4) + b$$

Rozwiązujemy równanie

$$-3{,}3 = 12 + b$$

$$b = -15{,}3$$

Szukany wzór funkcji jest następujący: $y = -3x - 15{,}3$.

Aby wyznaczyć wyraz wolny b, mogliśmy też wykorzystać współrzędne punktu $B(-7;\ 5{,}7)$. Wykonaj odpowiednie obliczenia i sprawdź, czy otrzymasz taki sam wynik.

Przykład 5.

Punkty $A(-58, 60)$ i $B(35, -21)$ należą do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Korzystając z tablic matematycznych, podamy kąt α nachylenia wykresu funkcji f do osi OX.

Obliczymy najpierw wartość współczynnika kierunkowego a:

$$a = \frac{-21 - 60}{35 - (-58)} = \frac{-81}{93} \approx -0{,}871$$

Wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha \approx -0{,}871$. Zatem kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest rozwarty. Szukamy w tablicach takiego kąta ostrego α_1, dla którego

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0{,}871$$

Odczytujemy:

$$\alpha_1 \approx 41^\circ$$

Zatem

$$\alpha = 180^\circ - \alpha_1,$$

skąd

$$\alpha \approx 139^\circ$$

Wykres funkcji f nachylony jest do osi OX pod kątem ok. 139°.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Podaj kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX, jeśli:
   a) $y = x + 5$ b) $y = -\sqrt{3}x$ c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$

2. Korzystając z tablic matematycznych, podaj przybliżoną miarę kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX, jeśli:
   a) $y = 0{,}9x - 2{,}7$ b) $y = 0{,}7x + 3$ c) $y = 1{,}8x + 7$
   d) $y = -14{,}3x + 2$ e) $y = -0{,}53x - 4{,}8$ f) $y = -4x + 1{,}07$

3. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem α i przechodzi przez punkt A, jeśli:
   a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$; $A(0, 5)$ b) $\alpha = 120^\circ$; $A(0, \ 1)$ c) $\alpha = 60^\circ$; $A\left(2\sqrt{3}, 4\right)$

4. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem α i przechodzi przez punkt A, jeśli:
   a) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$; $A(-4, -5)$ b) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$; $A(9, 2)$ c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$; $A(3, -1)$

5. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A(-43, 128)$ i $B(45, 908)$. Wyznacz kąt nachylenia wykresu funkcji f do osi OX.

Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera

Równoległość wykresów

Wiesz, że wykresy funkcji liniowych są równoległe tylko wtedy, gdy są nachylone do osi OX pod tym samym kątem. Zatem prawdziwe jest twierdzenie.

> ***Twierdzenie 1.***
> Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a_1$.

Przykład 1.

Dana jest funkcja liniowa $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Napiszemy wzór funkcji, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt $A(-6, 7)$.

Szukany wzór funkcji ma postać $y = ax + b$. Najpierw wyznaczamy równanie dowolnej prostej, równoległej do wykresu danej funkcji. To równanie ma postać:

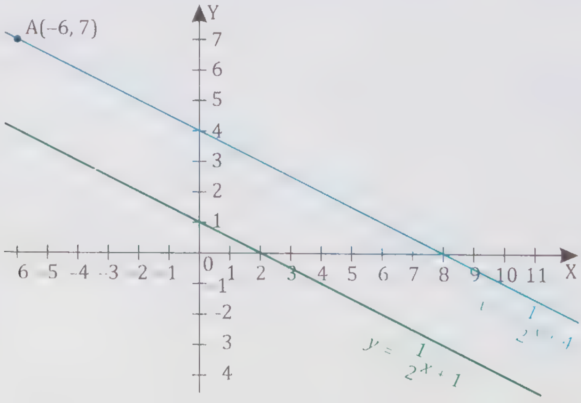
$$y = -\frac{1}{2}x + b \qquad \text{(współczynniki kierunkowe są równe).}$$

Następnie korzystamy z faktu, że punkt $A(-6, 7)$ należy do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x + b$, zatem

$$7 = -\frac{1}{2} \cdot (-6) + b, \quad \text{skąd} \quad 7 = 3 + b, \quad \text{więc} \quad b = 4.$$

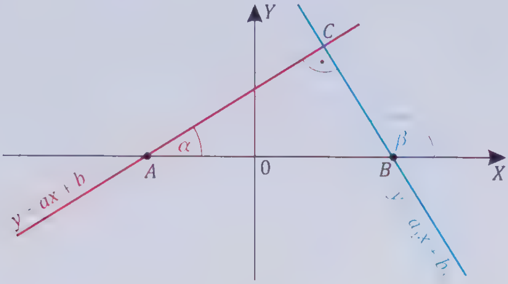
Szukany wzór funkcji to $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Sprawdźmy nasze obliczenia i naszkicujmy wykresy funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 1$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + 4$ we wspólnym układzie współrzędnych.



Prostopadłość wykresów funkcji

Naszkicujmy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a \neq 0$, $a_1 \neq 0$ i $a \neq a_1$. Wyprowadzimy warunek na prostopadłość tych wykresów.



Wykres funkcji

$$y = ax + b$$

przecina oś OX w punkcie A i jest nachylony do osi OX pod takim kątem (ostrym) α, że

$$\operatorname{tg}\alpha = a$$

Wykres funkcji

$$y = a_1x + b_1$$

przecina oś OX w punkcie B i jest nachylony do osi OX pod takim kątem (rozwartym) β, że

$$\operatorname{tg}\beta = a_1$$

Proste nie są równoległe do osi OX, bo z założenia $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$. Te proste są wykresami funkcji, więc nie są prostopadłe do osi OX. Punkt przecięcia się wykresów funkcji oznaczamy przez C.
Następnie rozważamy trójkąt ABC, w którym

$|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = 180° - \beta$ (z własności kątów przyległych).

Wobec tego $\sphericalangle ACB$ będzie kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| = 90°$$

Zatem wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\alpha + (180° - \beta) = 90°,$$

czyli

$$\beta = 90° + \alpha$$

Równość $\beta = 90° + \alpha$ jest równoważna równości

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90° + \alpha),$$

bo tangens dla dowolnych różnych argumentów ze zbioru $(90°, 180°)$ przyjmuje różne wartości.

Ponadto prawdziwe są równości (poznałeś je w klasie pierwszej):

1. $\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
2. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, o ile $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$, więc

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90° + \alpha) \underset{(1)}{=} -\operatorname{ctg}\alpha \underset{(2)}{=} -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Otrzymaliśmy zależność:

$\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, czyli

$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha = -1$, skąd

$a_1 \cdot a = -1$

Udowodniliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a \cdot a_1 = -1$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji liniowej $y = \frac{2}{3}x + 5$ i przechodzi przez punkt $A(4, 1)$.

Szukany wzór funkcji ma postać $y = ax + b$.
Najpierw wyznaczamy równanie dowolnej prostej, prostopadłej do wykresu danej funkcji. To równanie ma postać:

$$y = -\frac{3}{2}x + b$$

$\left(\text{bo współczynniki kierunkowe spełniają warunek } \frac{2}{3} \cdot a = -1, \text{skąd } a = -\frac{3}{2}\right)$.

Następnie korzystamy z faktu, że punkt $A(4, 1)$ należy do wykresu funkcji $y = -\frac{3}{2}x + b$, zatem

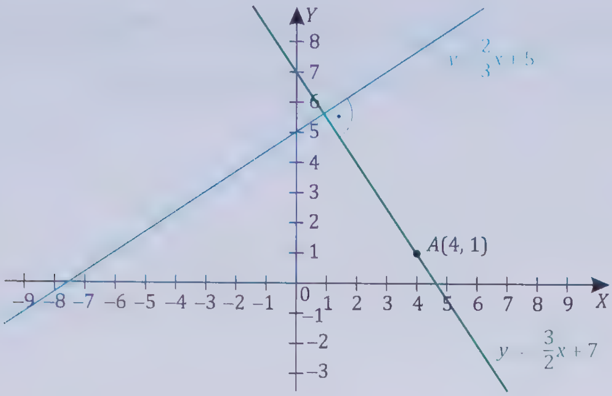
$1 = -\frac{3}{2} \cdot 4 + b$, skąd

$1 = -6 + b$, więc

$b = 7$

Wzór szukanej funkcji: $y = -\frac{3}{2}x + 7$.

Sprawdźmy nasze obliczenia i naszkicujmy wykresy funkcji $y = \frac{2}{3}x + 5$ oraz $y = -\frac{3}{2}x + 7$ we wspólnym układzie współrzędnych.



Przykład 3.

Wyznaczymy wartość parametru m, dla którego wykresy funkcji liniowych

$f(x) = 4 - (m + 3)x$ i $g(x) = 8x + 5$

są:

a) prostymi równoległymi b) prostymi prostopadłymi.

Ad a) Wykresy funkcji liniowych są równoległe wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych funkcji są jednakowe. Współczynnik kierunkowy funkcji f jest równy $-(m + 3)$, a funkcji g jest równy 8. Stąd:

$-(m + 3) = 8$, czyli $-m - 3 = 8$

$m = -11$

Wykresy funkcji f i g są równoległe wtedy, gdy $m = -11$.

Ad b) Wykresy funkcji f i g są prostopadłe wtedy, gdy iloczyn współczynników kierunkowych jest równy -1, czyli

$-(m + 3) \cdot 8 = -1$, zatem $m + 3 = \frac{1}{8}$

$m = -2\frac{7}{8}$

Wykresy funkcji f i g są prostopadłe wtedy, gdy $m = -2\frac{7}{8}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji liniowej $y = 4x - 5$ i przechodzi przez punkt $A(-8, 9)$.
2. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji liniowej $y = x + 7$ i przechodzi przez punkt $A(4, -2)$.
3. Wyznacz wartość parametru m, dla której wykresy funkcji liniowych $f(x) = (m - 1)x + 5$ i $g(x) = 2 - 3x$ są:
   a) prostymi równoległymi b) prostymi prostopadłymi.

Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego

Przykład 1.

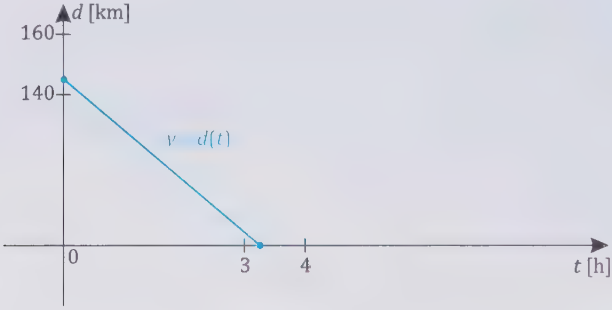
W wyścigu kolarskim grupa sportowców ma jeszcze 144 km do mety i jedzie ze średnią prędkością 45 km/h. Oznaczmy odległość (w km) tej grupy od mety literą d, zaś czas jazdy (w h) – literą t.

a) Wyznaczymy wzór opisujący odległość tej grupy od mety, w zależności od czasu.
b) Naszkicujemy wykres funkcji d.
c) Obliczymy, ile czasu potrzeba kolarzom, by dotrzeć do mety.

Ad a) Odległość grupy kolarzy od mety, w zależności od czasu t, opisuje wzór:

$$d(t) = 144 - 45 \cdot t, \quad \text{gdzie } t \in \left\langle 0, 3\frac{1}{5} \right\rangle$$

Ad b)



Ad c) Kolarze dotrą do mety w czasie t, dla którego $d(t) = 0$. Zatem:

$144 - 45 \cdot t = 0$, skąd $t = 3{,}2$ (h)

Kolarze dotrą do mety za 3 godziny i 12 minut.

Przykład 2.

W pewnym kraju od podatku dochodowego są zwolnione dochody nieprzekraczające 5 tys. dolarów. Za dochody przekraczające 5 tys. dolarów, ale nie większe niż 30 tys. dolarów, podatnik płaci podatek w wysokości 10% od dochodu pomniejszonego o 5 tys. dolarów. Jeżeli dochód przekracza 30 tys. dolarów, podatnik płaci 2500 dolarów plus 25% nadwyżki powyżej 30 tys. dolarów.

Opiszemy system podatkowy w tym kraju za pomocą funkcji f, która pokazuje zależność podatku od dochodu, i naszkicujemy jej wykres.

Oznaczamy:
x – dochód uzyskany przez podatnika (w dolarach)
y – podatek, jaki należy zapłacić od uzyskanego dochodu (w dolarach).

Jeżeli podatnik uzyska dochód x z przedziału $\langle 0, 5000\rangle$, to nie płaci podatku, czyli podatek ma wartość równą zeru.
Jeśli dochód x podatnika spełnia warunek

$5000 < x \leqslant 30\,000$,

podatnik płaci podatek obliczany w następujący sposób: dochód x pomniejszamy o 5000 dolarów i otrzymujemy kwotę

$x - 5000$

dolarów; następnie obliczamy 10% uzyskanej w ten sposób kwoty, czyli

$0{,}1 \cdot (x - 5000)$

Zatem podatnik, którego dochód znajduje się w przedziale $(5000, 30\,000\rangle$, zapłaci podatek w wysokości

$0{,}1x - 500$

Jeżeli natomiast dochód x podatnika przekroczy 30 tys. dolarów, to postępujemy następująco: od uzyskanego dochodu odejmujemy 30 000 dolarów i otrzymujemy nadwyżkę powyżej 30 000 dolarów, równą

$x - 30\,000$

obliczamy 25% z otrzymanej nadwyżki, czyli

$0{,}25 \cdot (x - 30\,000)$

i otrzymujemy kwotę

$0{,}25x - 7500$,

do której należy jeszcze dodać opłatę stałą w wysokości 2500 dolarów. Zatem podatek w tym przypadku wynosi:

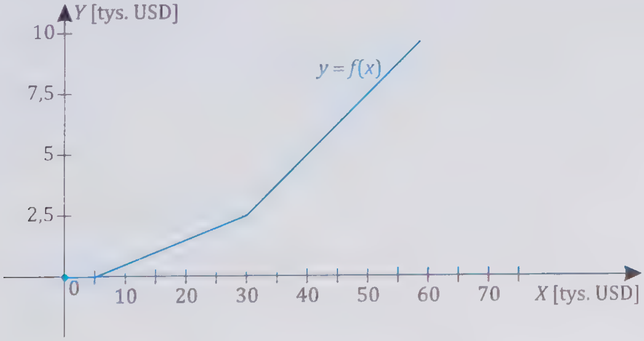
$0{,}25x - 7500 + 2500$, czyli

$0{,}25x - 5000$

Oto wzór funkcji f, opisującej system podatkowy w tym kraju:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant 5000 \\ 0{,}1x - 500, & \text{jeśli } 5000 < x \leqslant 30000 \\ 0{,}25x - 5000, & \text{jeśli } x > 30000 \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji f:



Oblicz, jaki podatek zapłaci obywatel tego kraju, który uzyskał dochód równy 28 000 dolarów, a jaki obywatel, którego dochód wyniósł 86 000 dolarów.

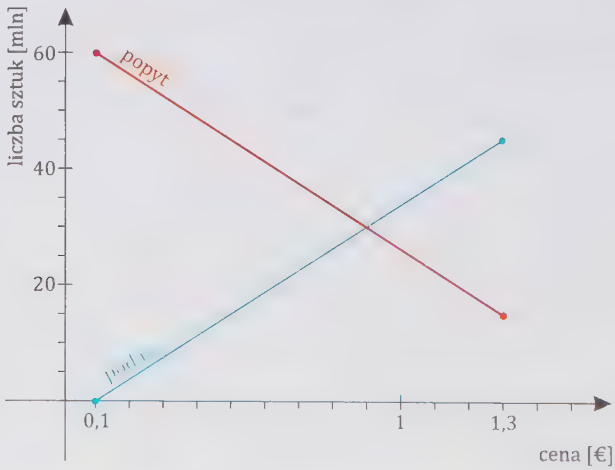
W ekonomii rozpatruje się zagadnienie popytu i podaży. Popyt to ilość dobra, jaką nabywcy są skłonni zakupić przy różnych poziomach ceny (w określonym czasie). Podaż to ilość dobra, jaką producenci są gotowi zaoferować przy różnych poziomach ceny. Przy pewnym poziomie ceny zapotrzebowanie zrównuje się z ilością oferowaną. Taką cenę nazywamy ceną równowagi.

Przykład 3.

W pewnym europejskim kraju przeprowadzono badania dotyczące zainteresowania producentów wytwarzaniem tabliczek czekolady, jak i zainteresowania konsumentów nabywaniem tabliczek czekolady. Okazało się, że jeśli cena tabliczki czekolady byłaby równa 0,1 €, to popyt wyniósłby wówczas 60 mln sztuk (na rok). Natomiast przy cenie za tabliczkę 1,3 € popyt zmalałby do 15 mln sztuk (na rok). Stwierdzono również, że przy cenie 0,1 € za tabliczkę producenci w ogóle nie byliby zainteresowani wytwarzaniem tabliczek czekolady, czyli podaż byłaby równa zeru. Natomiast przy cenie 1,3 € za tabliczkę podaż byłaby równa 45 mln sztuk (na rok). Załóżmy dodatkowo, że wraz ze wzrostem ceny od 0,1 € do 1,3 € popyt i podaż zmieniają się liniowo (tzn. wykresy przedstawiające popyt i podaż będą odcinkami prostej).

a) Przedstawimy w układzie współrzędnych wykresy obrazujące popyt i podaż (tzw. krzywe popytu i podaży).
b) Wyznaczymy wzory krzywej popytu i krzywej podaży.
c) Wyznaczymy cenę równowagi dla tabliczki czekolady i odpowiadającą tej cenie liczbę wyprodukowanych sztuk.

Ad a) Popyt i podaż są funkcją ceny, więc na osi poziomej przedstawiona jest wartość ceny (w euro), a na osi pionowej zaznaczona jest liczba tabliczek czekolady (w mln sztuk).



Zwróć uwagę, że popyt jest funkcją malejącą: wraz ze wzrostem ceny maleje liczba tabliczek czekolady, którą są skłonni zakupić konsumenci. Natomiast podaż jest funkcją rosnącą: wzrost ceny powoduje, że produkcja staje się atrakcyjna dla coraz większej liczby producentów, którzy chcą wytwarzać coraz więcej tabliczek czekolady.

Ad b) Z założenia wiemy, że popyt zmienia się liniowo, więc wzór funkcji opisującej popyt ma postać:

$y = ax + b$,

a do wykresu tej funkcji należą punkty: (0,1; 60) oraz (1,3; 15). Prowadzi to nas do układu równań:

$$\begin{cases} 60 = 0{,}1a + b \\ 15 = 1{,}3a + b \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy: $\begin{cases} a = -37{,}5 \\ b = 63{,}75 \end{cases}$

Otrzymaliśmy wzór funkcji opisującej popyt:

$y = -37{,}5x + 63{,}75$ wtedy, gdy $x \in \langle 0{,}1;\ 1{,}3\rangle$

Postępując podobnie, otrzymamy wzór funkcji opisującej podaż:

$y = 37{,}5x - 3{,}75$ wtedy, gdy $x \in \langle 0{,}1;\ 1{,}3\rangle$

Ad c) Cena równowagi to cena, dla której popyt jest równy podaży. Wyznaczymy ją więc z równania:

$-37{,}5x + 63{,}75 = 37{,}5x - 3{,}75$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymamy: $x = 0{,}9$ (€)

Cena równowagi tabliczki czekolady wynosi 0,9 €. Wówczas popyt i podaż równoważą się i są równe 30 mln tabliczek czekolady (sprawdź!).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. a) Napisz wzór funkcji wyrażającej zależność temperatury, podanej w stopniach Fahrenheita, od temperatury wyrażonej w stopniach Celsjusza, wiedząc, że ta zależność ma postać F = aC + b oraz wiedząc, że 100°C to 212°F, zaś 35°C to 95°F.
   b) Oblicz temperaturę powietrza w stopniach Celsjusza, jeśli temperatura tego dnia była równa 59°F.
   c) Temperatura zdrowego człowieka wynosi 36,6°C. Wyraź tę temperaturę w skali Fahrenheita.

2. Właściciel sklepu z farbami zaopatruje się w odległej o 120 km fabryce farb i lakierów lub w położonej 10 km od sklepu hurtowni. W hurtowni za puszkę farby sklepikarz płaci 26 zł, zaś w fabryce taka sama puszka farby jest o 20% tańsza. Sklepikarz przywozi towar własnym samochodem, który pali średnio 8 litrów benzyny na 100 km. Litr benzyny kosztuje 5 zł.
   a) Napisz wzór funkcji, która opisuje całkowity koszt zakupu farb, wraz z kosztami transportu, w przypadku zakupów w hurtowni ($y = h(x)$), jak i w fabryce ($y = f(x)$), gdzie x oznacza liczbę puszek farby.
   b) Przy jakiej liczbie puszek farby korzystniej jest zaopatrywać się w fabryce? (nie uwzględniamy czasu pracy właściciela sklepu oraz kosztów amortyzacji samochodu).

Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą

Z równaniami i nierównościami liniowymi zetknąłeś się wielokrotnie w trakcie uczenia się matematyki. W tym temacie zajmiemy się takimi równaniami i nierównościami, w zapisie których występuje parametr.

Definicja 1.
Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie mające postać $ax + b = 0$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązać równanie liniowe $ax + b = 0$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x funkcja liniowa $y = ax + b$ przyjmuje wartość zero?". Wiesz już, że liczba miejsc zerowych funkcji liniowej $y = ax + b$ zależy od współczynników a, b (zobacz twierdzenie 1. str. 15).
Możemy zatem wyciągnąć następujące wnioski dotyczące równania liniowego.

Równanie liniowe $ax + b = 0$

1) ma tylko jedno rozwiązanie $\frac{-b}{a}$ wtedy, gdy
   $a \neq 0$

W takim wypadku równanie $ax + b = 0$ nazywamy **równaniem stopnia pierwszego** z jedną niewiadomą;

2) jest równaniem tożsamościowym (czyli każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem tego równania) wtedy, gdy
   $a = 0$ i $b = 0$
3) jest równaniem sprzecznym (czyli nie ma rozwiązań) wtedy, gdy
   $a = 0$ i $b \neq 0$.

Zauważ, że nie ma innych możliwości.

Przykład 1.

Zbadamy istnienie i liczbę rozwiązań równania
(*) $m^2x - m = x + 1$
w zależności od parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

Niewiadoma w naszym równaniu oznaczona jest literą x; dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Aby ułatwić sobie zadanie, przekształcimy równoważnie równanie (*) do postaci $ax + b = 0$.

$$m^2x - m = x + 1 \Leftrightarrow m^2x - m - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x - (m + 1) = 0$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\underbrace{(m^2-1)}_{a}x - \underbrace{(m+1)}_{b} = 0$$

Wyznaczamy teraz te wartości parametru m, dla których współczynnik przy x (czyli współczynnik a) jest równy zeru.

$$m^2-1=0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)=0 \Leftrightarrow (m-1=0 \vee m+1=0) \Leftrightarrow (m=1 \vee m=-1)$$

Tak więc, jeśli $m \in \mathbf{R}-\{-1, 1\}$, to współczynnik przy x jest różny od zera.

Teraz przechodzimy do dyskusji:

- Jeśli $m \in \mathbf{R}-\{-1, 1\}$, to rozważane równanie ma jedno rozwiązanie $\frac{1}{m-1}$ (sprawdź to!).
- Jeśli $m=-1$, to rozważane równanie przyjmuje postać

$$0 \cdot x+0=0 \qquad (0=0)$$

Jest to równanie tożsamościowe.

- Jeśli $m=1$, to rozważane równanie przyjmuje postać

$$0 \cdot x-2=0 \qquad (-2=0)$$

Jest to równanie sprzeczne.

Rozpatrzyliśmy wszystkie wartości parametru m. Podsumujmy:

Jeśli $m \in \mathbf{R}-\{-1, 1\}$, to równanie $m^2x-m=x+1$ ma tylko jedno rozwiązanie: $\frac{1}{m-1}$; jeśli $m=-1$, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem danego równania; jeśli $m=1$, to równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 2.

Zbadamy istnienie i liczbę rozwiązań równania $kx+p=2x+5$ w zależności od parametrów k oraz p, gdzie $k \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$.

Dane równanie zapiszemy w postaci $ax+b=0$. Mamy:

$$kx+p=2x+5 \Leftrightarrow kx+p-2x-5=0 \Leftrightarrow (k-2)x+p-5=0$$

Otrzymaliśmy zatem:

$$(*) \qquad \underbrace{(k-2)}_{a}x+\underbrace{p-5}_{b}=0$$

Współczynnik przy x przyjmuje wartość zero tylko wtedy, gdy

$k-2=0$, czyli $k=2$.

Zatem jeśli $k \in \mathbf{R}-\{2\}$, to współczynnik przy x jest różny od zera ($a \neq 0$).

Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań:

- Jeśli $k \in \mathbf{R}-\{2\}$, to równanie liniowe ma tylko jedno rozwiązanie równe $\frac{5-p}{k-2}$;
- Jeśli $k=2$, to równanie (*) przyjmuje postać $p-5=0$. Wówczas jeśli:
  a) $p=5$, to równanie (*) jest tożsamościowe ($a=0 \wedge b=0$);
  b) $p \neq 5$, to równanie (*) jest sprzeczne ($a=0 \wedge b \neq 0$).

Podsumujmy:

Jeśli $k \in \mathbf{R}-\{2\} \wedge p \in \mathbf{R}$, to równanie $kx+p=2x+5$ ma tylko jedno rozwiązanie równe $\frac{5-p}{k-2}$;

jeśli $k = 2 \wedge p = 5$, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem danego równania;
jeśli $k = 2 \wedge p \in \boldsymbol{R} - \{5\}$, to dane równanie nie ma rozwiązań.

Definicja 2.
Nierównością liniową z jedną niewiadomą x nazywamy nierówność mającą postać: $ax + b > 0$ lub $ax + b > 0$ lub $ax + b \geqslant 0$ lub $ax + b \leqslant 0$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Jeśli $a \neq 0$, to każdą z nierówności liniowych wymienionych w definicji 2. nazywamy **nierównością pierwszego stopnia** z jedną niewiadomą.

Rozwiązać nierówność ostrą $ax + b > 0$ $(ax + b < 0)$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x funkcja liniowa $y = ax + b$ przyjmuje wartości dodatnie (ujemne)?"

Rozwiązać nierówność nieostrą $ax + b \geqslant 0$ $(ax + b \leqslant 0)$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x funkcja liniowa $y = ax + b$ przyjmuje wartości nieujemne (niedodatnie)?"

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których zbiór rozwiązań nierówności liniowej $2x + 5m \geqslant 3$:

a) jest przedziałem $\langle 4, +\infty)$

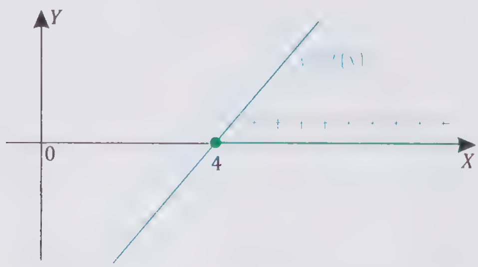
b) zawiera się w przedziale $(4, +\infty)$.

Nierówność $2x + 5m \geqslant 3$ przekształcamy równoważnie do postaci $2x + 5m - 3 \geqslant 0$. Rozważmy funkcję liniową $f(x) = 2x + 5m - 3$. Zauważ, że funkcja f jest rosnąca.

Ad a) Mamy wyznaczyć te wartości parametru m, dla których spełniony jest warunek:

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle 4, +\infty)$$

Szkic wykresu funkcji f



Do spełnienia powyższego warunku wystarczy, by miejscem zerowym funkcji liniowej f była liczba 4. Prowadzi nas to do równania

$f(4) = 0$, czyli

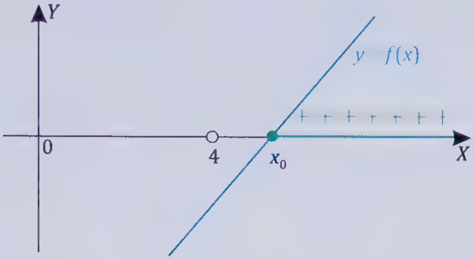
$2 \cdot 4 + 5m - 3 = 0$, skąd

$m = -1$

Zbiorem rozwiązań nierówności $2x+5m \geqslant 3$ jest przedział $\langle 4, +\infty)$ wtedy, gdy $m=-1$.

Ad b) Aby zbiór rozwiązań nierówności $2x + 5m - 3 \geqslant 0$ zawierał się w przedziale $(4, +\infty)$, wystarczy, żeby miejsce zerowe funkcji f było większe od 4.

Szkic wykresu funkcji f



Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f (w zależności od parametru m).

$2x+5m-3=0$, skąd

$2x=3-5m$

$x=\dfrac{3-5m}{2}$

Następnie rozwiązujemy nierówność.

$\dfrac{3-5m}{2} > 4 \quad / \cdot 2$

$3-5m>8$

$-5m>5 \quad / : (-5)$

$m<-1$

Zbiór rozwiązań nierówności liniowej $2x+5m \geqslant 3$ zawiera się w przedziale $(4, +\infty)$ wtedy, gdy $m \in (-\infty, -1)$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru k, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(9-k^2)x+1+k<0$ jest:

a) zbiór liczb rzeczywistych

b) zbiór pusty.

Rozważmy funkcję liniową $g(x)=(9-k^2)x+1+k$.

Ad a) Funkcja g przyjmuje wartości ujemne w całym zbiorze liczb rzeczywistych tylko wtedy, gdy funkcja g jest funkcją stałą, a jej jedyną wartością jest liczba ujemna. Zatem spełnione są jednocześnie dwa warunki:

1) współczynnik przy x (czyli $9-k^2$) jest równy zeru oraz
2) wyraz wolny (czyli $1+k$) jest mniejszy od zera.

Mamy więc koniunkcję dwóch warunków:

$$\begin{cases} 9-k^2=0 \\ 1+k<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \vee k=-3 \\ k<-1 \end{cases} \Leftrightarrow k=-3$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $(9-k^2)x+1+k<0$ jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy, gdy $k=-3$.

Ad b) Funkcja g nie przyjmuje wartości ujemnych dla żadnego argumentu tylko wtedy, gdy spełniony jest układ warunków (wyjaśnij to dokładnie):

$$\begin{cases} 9-k^2=0 \\ 1+k\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow k=3$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $(9-k^2)x+1+k<0$ jest zbiór pusty wtedy, gdy $k=3$.

Przykład 5.

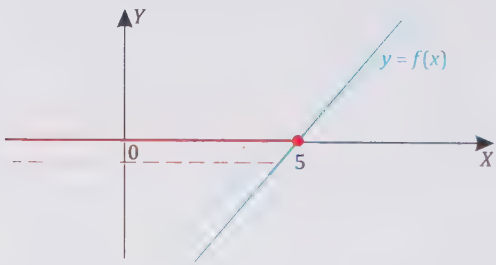
Wyznaczymy te wartości parametru p, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $px+3p^2-6p\leqslant 0$ jest przedział:

a) $(-\infty, 5\rangle$ b) $\langle 9, +\infty)$.

Rozważmy funkcję liniową $f(x)=px+3p^2-6p$.

Ad a) Funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie w przedziale $(-\infty, 5\rangle$ tylko wtedy, gdy współczynnik przy x jest dodatni i jednocześnie miejscem zerowym funkcji f jest liczba 5 (zobacz rysunek poniżej).

Szkic wykresu funkcji f



Mamy więc koniunkcję warunków:

$$\begin{cases} p>0 \\ f(5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p>0 \\ 5p+3p^2-6p=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p>0 \\ 3p^2-p=0 \end{cases}$$

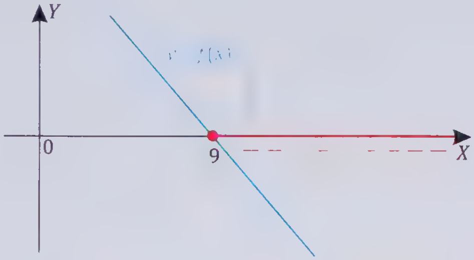
$$\begin{cases} p > 0 \\ p = 0 \ \vee \ p = \dfrac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{zatem}$$

$$p = \frac{1}{3}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $px + 3p^2 - 6p \leqslant 0$ jest przedział $(-\infty, 5\rangle$ wtedy, gdy $p = \frac{1}{3}$.

Ad b) Funkcja f będzie przyjmować wartości niedodatnie w przedziale $\langle 9, +\infty)$ tylko wtedy, gdy współczynnik przy x będzie ujemny oraz miejscem zerowym funkcji f będzie liczba 9 (zobacz rysunek poniżej).

Szkic wykresu funkcji f



Mamy więc układ warunków:

$$\begin{cases} p < 0 \\ f(9) = 0, \end{cases} \quad \text{skąd}$$

$p = -1$ (sprawdź!)

Zbiorem rozwiązań nierówności $px + 3p^2 - 6p \leqslant 0$ jest przedział $\langle 9, +\infty)$ wtedy, gdy $p = -1$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Zbadaj istnienie i liczbę rozwiązań równania z parametrem m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$:
   a) $(m + 1)x = m^2 - 1$ b) $(5 - m)x = m + 5$
2. Wyznacz wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$, dla których:
   a) rozwiązaniem równania $m^2x + 2 = 4x + m$ jest każda liczba rzeczywista
   b) zbiór rozwiązań równania $(m^2 - 9)x + m - 3 = 0$ jest pusty.
3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności $3x \leqslant 12 - 3m$:
   a) jest przedziałem $(-\infty, 1\rangle$
   b) zawiera się w przedziale $(-\infty, -2)$.

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Pojęcie wartości bezwzględnej poznałeś w klasie pierwszej. Przypomnijmy:

$$|w| = \begin{cases} w, & \text{jeśli } w \geqslant 0 \\ -w, & \text{jeśli } w < 0 \end{cases}$$

Poznałeś też interpretację wartości bezwzględnej jako odległości między punktami na osi liczbowej. Rozwiązywałeś również proste równania i nierówności z wartością bezwzględną, m. in. z wykorzystaniem następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Jeśli w jest dowolnym wyrażeniem, a – dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to:

a) $|w| = a \Leftrightarrow (w = a \vee w = -a)$

b) $|w| < a \Leftrightarrow (w > -a \wedge w < a) \Leftrightarrow -a < w < a \Leftrightarrow w \in (-a, a)$

c) $|w| \leqslant a \Leftrightarrow (w \geqslant -a \wedge w \leqslant a) \Leftrightarrow -a \leqslant w \leqslant a \Leftrightarrow w \in \langle -a, a\rangle$

d) $|w| > a \Leftrightarrow (w < -a \vee w > a) \Leftrightarrow w \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

e) $|w| \geqslant a \Leftrightarrow (w \leqslant -a \vee w \geqslant a) \Leftrightarrow w \in (-\infty, -a\rangle \cup \langle a, +\infty)$

Przykład 1.

Rozwiążemy równania:

a) $|3x + 2| = 8$

b) $\big||4x - 1| - 2\big| = 9$

W rozwiązaniu tych równań wykorzystamy twierdzenie 1a.

Ad a) Mamy:

$$|3x + 2| = 8 \Leftrightarrow (3x + 2 = 8 \vee 3x + 2 = -8) \Leftrightarrow (3x = 6 \vee 3x = -10) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = 2 \vee x = -\frac{10}{3}\right)$$

Równanie ma dwa rozwiązania: 2 oraz $-3\frac{1}{3}$.

Ad b) W przypadku tego równania z twierdzenia 1a skorzystamy dwukrotnie (wskaż te miejsca!).

$$\big||4x - 1| - 2\big| = 9 \Leftrightarrow (|4x - 1| - 2 = 9 \vee |4x - 1| - 2 = -9) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|4x - 1| = 11 \vee \underbrace{|4x - 1| = -7}_{\text{(równanie sprzeczne)}}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4x - 1 = 11 \vee 4x - 1 = -11) \Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -2{,}5)$$

Równanie ma dwa rozwiązania: 3 oraz –2,5.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówności:

a) $|3 - 2x| < 5$

b) $\big||3x + 6| - 7\big| \geqslant 4$

Ad a) W rozwiązaniu skorzystamy z twierdzenia 1b:

$$|3-2x|<5 \Leftrightarrow (3-2x>-5 \wedge 3-2x<5) \Leftrightarrow (-2x>-8 \wedge -2x<2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x<4 \wedge x>-1) \Leftrightarrow x \in (-1, 4)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-1, 4)$.

Ad b) W przypadku tej nierówności dwukrotnie skorzystamy z twierdzenia 1e i raz z twierdzenia 1c (wskaż te miejsca!).

$$\big||3x+6|-7\big| \geqslant 4 \Leftrightarrow (|3x+6|-7 \leqslant -4 \vee |3x+6|-7 \geqslant 4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|3x+6| \leqslant 3 \vee |3x+6| \geqslant 11) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(3x+6 \geqslant -3 \wedge 3x+6 \leqslant 3) \vee (3x+6 \leqslant -11 \vee 3x+6 \geqslant 11)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(3x \geqslant -9 \wedge 3x \leqslant -3) \vee 3x \leqslant -17 \vee 3x \geqslant 5] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[(x \geqslant -3 \wedge x \leqslant -1) \vee x \leqslant -\frac{17}{3} \vee x > \frac{5}{3}\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[x \in \langle -3, -1\rangle \vee x \in \left(-\infty, -\frac{17}{3}\right\rangle \vee x \in \left\langle\frac{5}{3}, +\infty\right)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{17}{3}\right\rangle \cup \langle -3, -1\rangle \cup \left\langle\frac{5}{3}, +\infty\right)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów
$\left(-\infty, -\frac{17}{3}\right\rangle \cup \langle -3, -1\rangle \cup \left\langle\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

Omówimy teraz ogólniejszą metodę rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną, odwołującą się bezpośrednio do definicji wartości bezwzględnej. Pokażemy też zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $2|x-1| \leqslant -x+7$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych. W nierówności występuje jedno wyrażenie ze znakiem wartości bezwzględnej. Po powołaniu się na definicję wartości bezwzględnej otrzymujemy

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ -x+1, & \text{jeśli } x<1 \end{cases}$$

Zauważmy, że liczba 1 (czyli liczba, dla której wyrażenie $x-1$ przyjmuje wartość 0) rozdziela dziedzinę nierówności na dwa przedziały: $(-\infty, 1)$ i $\langle 1, +\infty)$. W przedziale $(-\infty, 1)$ nierówność $2|x-1| \leqslant -x+7$ przyjmuje postać $2(-x+1) \leqslant \ x+7$, a w przedziale $\langle 1, +\infty)$ – postać $2(x-1) \leqslant -x+7$. Otrzymujemy więc alternatywę warunków:

$$1^\circ \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ 2(-x+1) \leqslant -x+7 \end{cases} \quad \vee \quad 2^\circ \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ 2(x-1) \leqslant -x+7 \end{cases}$$

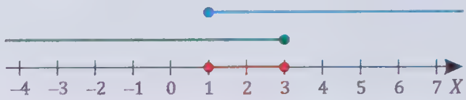
Wystarczy teraz rozwiązać każdą nierówność, uwzględniając przedział, w którym jest określona, a następnie zsumować otrzymane zbiory rozwiązań. Mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ -2x + 2 \leqslant -x + 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ 2x - 2 \leqslant -x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ -x \leqslant 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ 3x \leqslant 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ x \geqslant -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ x \leqslant 3 \end{cases}$$

$\langle -5, 1)$



$\langle 1, 3\rangle$

Ostatecznie otrzymujemy:

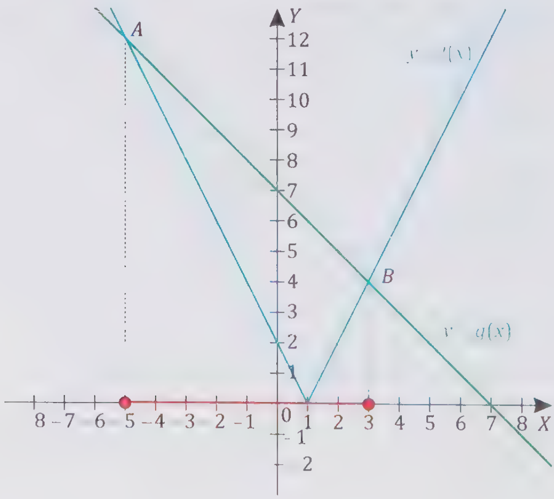
$$[x \in \langle -5, 1) \vee x \in \langle 1, 3\rangle] \Leftrightarrow x \in \langle -5, 3\rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $2|x-1| \leqslant -x+7$ jest przedział $\langle -5, 3\rangle$.

Nierówność $2|x-1| \leqslant -x+7$ można też rozwiązać, wykorzystując wykresy funkcji: $f(x) = 2|x-1|$ i $g(x) = -x+7$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. W tym celu wystarczy ustalić, dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie większe od wartości funkcji g.
Zapisujemy wzór funkcji f bez znaku wartości bezwzględnej:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ 2(-x+1), & \text{jeśli } x < 1 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad f(x) = \begin{cases} 2x-2, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ -2x+2, & \text{jeśli } x < 1 \end{cases}$$

Następnie szkicujemy wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.



Wykresy funkcji przecinają się w dwóch punktach $A(-5, 12)$ i $B(3, 4)$ (sprawdź!). Funkcja f przyjmuje nie większe wartości niż funkcja g dla argumentów z przedziału $\langle -5, 3\rangle$.

UWAGA: Wykres funkcji f można też otrzymać po odpowiednim przekształceniu wykresu funkcji $y = |x|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$ (wskaż te przekształcenia).

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $3|2x + 1| = 2|5 - 3x| - 13$.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Liczby

$$-\frac{1}{2} \text{ i } \frac{5}{3},$$

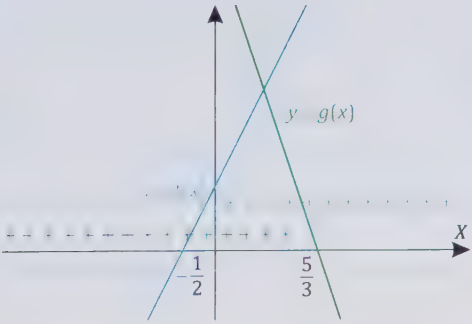
dla których wyrażenia

$$2x + 1 \text{ oraz } 5 - 3x$$

(wyrażenia „pod znakiem wartości bezwzględnej") przyjmują wartość 0, dzielą zbiór $\boldsymbol{R}$ na trzy rozłączne przedziały:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right), \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right).$$

W każdym z tych przedziałów wyrażenia $2x + 1$ oraz $5 - 3x$ przyjmują wartości o stałym znaku (czyli wartości niedodatnie albo nieujemne). Aby określić, jaki to znak, możemy posłużyć się na przykład uproszczonym szkicem wykresów funkcji $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = 5 - 3x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Mamy zatem trzy przypadki:

1° Jeśli $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, to $2x + 1 < 0$ i $5 - 3x > 0$, zatem

$$|2x + 1| = -(2x + 1) \quad \text{i} \quad |5 - 3x| = 5 - 3x.$$

2° Jeśli $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$, to $2x + 1 \geqslant 0$ i $5 - 3x > 0$, zatem

$$|2x + 1| = 2x + 1 \quad \text{i} \quad |5 - 3x| = 5 - 3x.$$

3° Jeśli $x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right)$, to $2x + 1 > 0$ i $5 - 3x \leqslant 0$, zatem

$$|2x + 1| = 2x + 1 \quad \text{i} \quad |5 - 3x| = -(5 - 3x).$$

Tak więc żeby rozwiązać równanie $3|2x + 1| = 2|5 - 3x| - 13$, wystarczy rozpatrzeć alternatywę następujących warunków:

$$1^\circ \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ -3(2x+1) = 2(5-3x) - 13 \end{cases} \vee$$

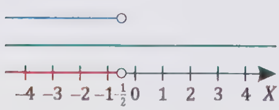
$$2^\circ \begin{cases} x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right) \\ 3(2x+1) = 2(5-3x) - 13 \end{cases} \vee$$

$$3^\circ \begin{cases} x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right) \\ 3(2x+1) = -2(5-3x) - 13 \end{cases}$$

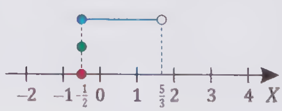
Stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ -6x - 3 = 10 - 6x - 13 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right) \\ 6x + 3 = 10 - 6x - 13 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right) \\ 6x + 3 = -10 + 6x - 13 \end{cases}$$

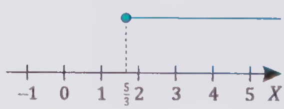
$$\begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ 0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right) \\ 3 = -23 \end{cases}$$



$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$



$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$



$\varnothing$

Ostatecznie

$$\left[x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \vee x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right] \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Zbiorem rozwiązań równania $3|2x + 1| = 2|5 - 3x| - 13$ jest przedział $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność $|x-3|-2x<-2|x+1|+11$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych. Liczby -1 i 3 dzielą zbiór $\boldsymbol{R}$ na trzy rozłączne przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 3)$ oraz $\langle 3, +\infty)$. Wystarczy więc rozważyć alternatywę trzech przypadków (przeanalizuj dokładnie każdy z nich!):

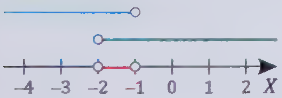
$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ -(x-3)-2x < 2(x+1)+11 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ -(x-3)-2x < -2(x+1)+11 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ (x-3)-2x < -2(x+1)+11 \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ -3x+3 < 2x+13 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ -3x+3 < -2x+9 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ -x-3 < -2x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ -5x < 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ -x < 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ x < 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ x > -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ x > -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ x < 12 \end{cases}$$



$(-2, -1)$

$\langle -1, 3)$

$\langle 3, 12)$

Zatem

$$[x \in (-2, -1) \vee x \in \langle -1, 3) \vee x \in \langle 3, 12)] \Leftrightarrow x \in (-2, 12)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x-3|-2x<-2|x+1|+11$ jest przedział $(-2, 12)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równanie $|3x-2|=4-x$ w przedziale $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right\rangle$.
2. Rozwiąż nierówność:
   a) $|2+x|<3x$
   b) $|2x-1| \geqslant x+7$
3. Rozwiąż równanie:
   a) $|x+5|-2|x-3|=x$
   b) $|4+x|+x=6-|x|$
4. Rozwiąż nierówność:
   a) $|x-4|+|6-2x| \leqslant x-2$
   b) $|2x-2|-|7-x|>x+1$

Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Definicja 1.
Równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x oraz y nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $ax + by = c$, przy czym a i b nie są jednocześnie zerami. Liczby rzeczywiste a, b, c nazywamy **współczynnikami równania**.

Przykładem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest równanie $3x + 2y = 4$. Mamy wówczas: $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$. Jeśli do tego równania wstawimy w miejsce x liczbę (-2), a w miejsce y – liczbę 5, to otrzymamy zdanie prawdziwe: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 4$. Jeśli natomiast w miejsce x wstawimy liczbę 5, a w miejsce y – liczbę (-2), to otrzymamy zdanie fałszywe: $3 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = 4$. Powiemy, że para liczb $(-2, 5)$ spełnia równanie $3x + 2y = 4$, a para $(5, -2)$ nie spełnia danego równania. Parę liczb, która spełnia równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, nazywamy **rozwiązaniem** tego **równania**.

Czy istnieje tylko jedno rozwiązanie równania $3x + 2y = 4$? Oczywiście, że nie – jest ich dużo więcej. Wyznaczmy z równania niewiadomą y:

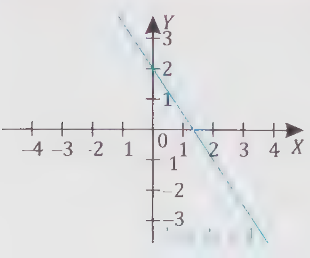
$2y = 4 - 3x \quad / : 2,$ skąd otrzymujemy

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Ta postać pozwala wyznaczyć inne rozwiązania danego równania. W miejsce x możemy wstawić dowolną liczbę rzeczywistą. Wówczas dla konkretnej wartości x niewiadoma y jest wyznaczona w sposób jednoznaczny, np. jeśli $x = 0$, to otrzymujemy $y = 2$, natomiast jeśli $x = 4$, to mamy $y = -4$. Pary $(0, 2)$ i $(4, -4)$ są kolejnymi rozwiązaniami rozpatrywanego równania. Łatwo zauważyć, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dlatego do ich interpretacji wygodnie jest posłużyć się wykresem równania.

Definicja 2.
Wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x, y nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y), których współrzędne spełniają to równanie.

Twierdzenie 1.
Wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x, y jest prosta.



Wszystkie rozwiązania równania $3x + 2y = 4$ możemy opisać jako pary liczb mające postać $\left(x, -\frac{3}{2}x + 2\right)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

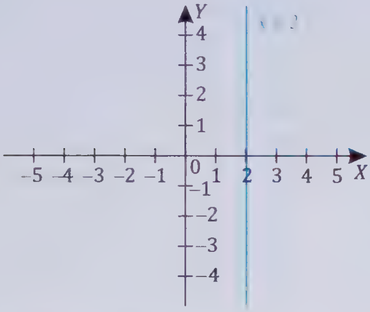
Może się zdarzyć, że w równaniu $ax + by = c$ jedna z liczb a lub b jest równa 0. Omówimy tę sytuację w poniższym przykładzie.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykresy równań: a) $2x + 0y = 4$ b) $0x - y = 3$

$$2x + 0y = 4$$

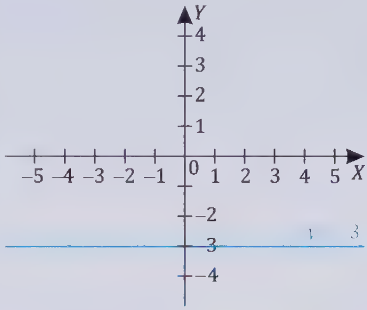
Zauważ, że $0y = 0$ dla każdej liczby y. Równanie przyjmuje postać $2x = 4$, stąd $x = 2$. Rozwiązaniami są wszystkie pary liczb mające postać $(2, y)$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$.



Wykresem równania jest prosta $x = 2$.

$$0x - y = 3$$

W tym przypadku wykorzystamy to, że $0x = 0$ dla każdej liczby x. Równanie przyjmuje postać: $-y = 3$, stąd $y = -3$. Rozwiązaniami są wszystkie pary liczb mające postać $(x, -3)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Wykresem równania jest prosta $y = -3$.

Podsumujmy:

- Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to równanie $ax + by = c$ opisuje prostą przecinającą oś OX w punkcie $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ i oś OY w punkcie $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.
- Jeśli $a \neq 0$ i $b = 0$, to równanie $ax + 0y = c$ opisuje prostą równoległą do osi OY.
- Jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie $0x + by = c$ opisuje prostą równoległą do osi OX.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Podaj wszystkie pary liczb (x, y), spełniające poniższe równania:
   a) $x + 4y = 1$ b) $-3x + 2y = 0$ c) $x + 0y = -12$ d) $0x + y = 7$
2. Naszkicuj wykresy następujących równań liniowych z niewiadomymi x i y:
   a) $x + 0y = -3$ b) $x - 2y = 0$ c) $-2x + y = 1$ d) $0x + y = 5$
3. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywiste m, dla których wykres równania:
   a) $(m-2)x + 4y = 8$ jest prostą równoległą do osi OX;
   b) $6x + (m+1)y = 3$ jest prostą równoległą do osi OY.

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

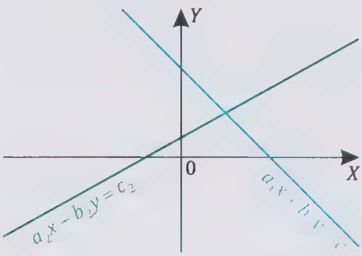
Definicja 1.
Układem dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy koniunkcję takich równań i oznaczamy:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad \text{gdzie } a_1^2 + b_1^2 > 0 \text{ i } a_2^2 + b_2^2 > 0.$$

Definicja 2.
1) **Rozwiązaniem układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** nazywamy każdą parę liczb (x, y), która spełnia jednocześnie oba równania układu.
2) **Rozwiązać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** to wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania, albo stwierdzić, że zbiór rozwiązań jest pusty.

Wiadomo, że wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta. W zależności od położenia dwóch prostych w układzie współrzędnych równania opisujące te proste tworzą jeden z trzech układów równań.

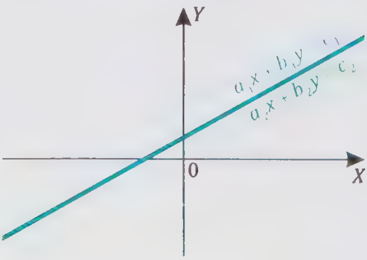
- Układ oznaczony



Proste mają tylko jeden punkt wspólny. Współrzędne tego punktu tworzą parę liczb, która spełnia zarówno równanie $a_1x + b_1y = c_1$, jak i równanie $a_2x + b_2y = c_2$. Ta para liczb jest jedynym rozwiązaniem układu.

Układ oznaczony ma jedno rozwiązanie.

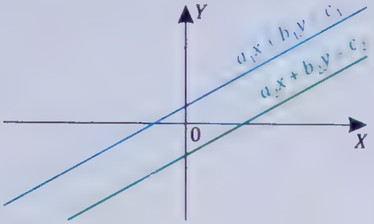
- Układ nieoznaczony



Proste się pokrywają. Każdy punkt jednej prostej jest jednocześnie punktem należącym do drugiej prostej. Każda para liczb rzeczywistych, spełniająca jedno równanie, spełnia również drugie równanie; tych par jest nieskończenie wiele.

Układ nieoznaczony ma nieskończenie wiele rozwiązań.

- Układ sprzeczny



Proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych. Nie istnieje para liczb, która spełniałaby jednocześnie oba równania.

Układ sprzeczny nie ma rozwiązań.

> ***Definicja 4.***
> **Dwa układy równań nazywamy równoważnymi** wtedy, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

W gimnazjum poznałeś dwie algebraiczne metody rozwiązywania układów równań: metodę podstawiania i metodę przeciwnych współczynników. Przypomnimy je, rozwiązując trzy układy równań.

$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 4y = 3 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$

Stosując metodę podstawiania, wykorzystujemy następujące twierdzenie:

> ***Twierdzenie 2.***
> Jeżeli z jednego równania układu wyznaczymy jedną niewiadomą i podstawimy otrzymane wyrażenie do drugiego równania zamiast tej niewiadomej, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego równania. $\begin{cases} y = 6 - 3x \\ 5x + 2(6 - 3x) = 8 \end{cases}$ Z drugiego równanie wyznaczamy x. $\begin{cases} y = 6 - 3x \\ x = 4 \end{cases}$ W miejsce x podstawiamy do pierwszego równania liczbę 4 i obliczamy y. $\begin{cases} y = -6 \\ x = 4 \end{cases}$ Rozwiązaniem układu jest jedna para $(4, -6)$. Układ jest oznaczony.	$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$ Wyznaczamy x z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego równania. $\begin{cases} x = 4 + y \\ 3(4 + y) - 3y = 12 \end{cases}$ Porządkujemy drugie równanie i otrzymujemy: $\begin{cases} x = 4 + y \\ 12 = 12 \end{cases}$ Druga równość jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej y. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(4 + y, y)$, gdzie $y \in \mathbf{R}$. Układ jest nieoznaczony.	$\begin{cases} -x + 4y = 3 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$ Wyznaczamy x z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego równania, następnie zamieniamy równania miejscami. $\begin{cases} x = 1 + 4y \\ -(1 + 4y) + 4y = 3 \end{cases}$ Porządkujemy drugie równanie i otrzymujemy: $\begin{cases} x = 1 + 4y \\ -1 = 3 \end{cases}$ Druga równość jest fałszywa dla każdej liczby rzeczywistej y. Zbiór rozwiązań układu jest pusty. Układ jest sprzeczny.

Teraz te same układy równań rozwiążemy metodą przeciwnych współczynników. Pomocne nam będzie poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Jeżeli obie strony jednego z równań układu pomnożymy przez dowolną liczbę różną od zera, a następnie otrzymane równanie i drugie równanie układu dodamy stronami, i tak otrzymanym równaniem zastąpimy dowolne z równań układu, to otrzymamy układ równań równoważny danemu.

$\begin{cases} 3x + y = 6 \quad / \cdot (-2) \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ Pierwsze równanie mnożymy stronami przez –2 i otrzymujemy wtedy przeciwne współczynniki przy niewiadomej y w obu równaniach. $+\begin{cases} -6x - 2y = -12 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ Dodajemy równania stronami i dopisujemy jedno z równań układu. $\begin{cases} -x = -4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ Z pierwszego równania wyznaczamy x i podstawiamy do drugiego równania. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$ Rozwiązaniem jest para liczb $(4, -6)$.	$\begin{cases} x - y = 4 \quad / \cdot (-3) \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$ Pierwsze równanie mnożymy stronami przez –3. $+\begin{cases} -3x + 3y = -12 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$ Dodajemy równania stronami i dopisujemy jedno z równań układu. $\begin{cases} 0 = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 0 \\ x = 4 + y \end{cases}$ Wszystkie rozwiązania są postaci $(y + 4, y)$, gdzie $y \in \mathbb{R}$.	$+\begin{cases} -x + 4y = 3 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$ Mamy przeciwne współczynniki przy takich samych niewiadomych; dodajemy równania stronami i przepisujemy jedno równanie. $\begin{cases} 0 = 4 \\ -x + 4y = 3 \end{cases}$ Pierwsza równość jest fałszywa. Układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązań.

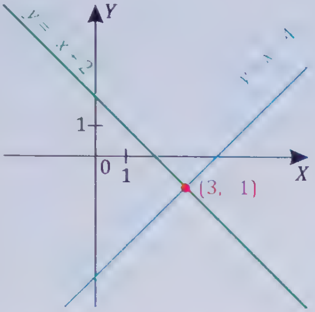
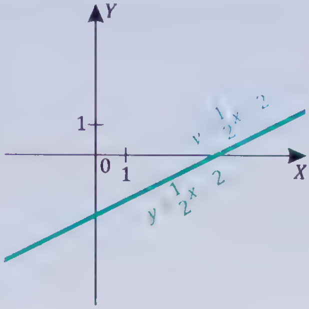
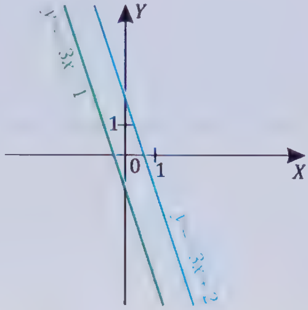
Układ równań można również rozwiązać, posługując się wykresami tych równań.

Przykład 1.

Rozwiążemy układy równań, posługując się wykresami tych równań:

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y = \frac{1}{6} \end{cases}$

W tym celu wyznaczymy niewiadomą y z obu równań układu i naszkicujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy obu równań.

$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$
		
Odczytujemy współrzędne punktu przecięcia się obu wykresów $(3, -1)$. Następnie sprawdzamy rachunkowo poprawność odczytu: $L_1 = 3 - (-1) = 4$, $P_1 = 4$, $L_1 = P_1$ $L_2 = 3 + (-1) = 2$, $P_2 = 2$, $L_2 = P_2$ Rozwiązaniem układu jest para liczb $(3, -1)$.	Układ jest nieoznaczony. Rozwiązania układu mają postać $\left(x, \frac{1}{2}x - 2\right)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.	Układ jest sprzeczny. Zbiór rozwiązań jest pusty.

Zauważyłeś zapewne, że układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest określony jednoznacznie przez podanie współczynników równań. A zatem układ równań

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

możemy opisać w ten sposób, że podajemy współczynniki zapisane odpowiednio w prostokątnej tablicy (zwanej macierzą)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

W praktyce okazuje się, że wygodniej posługiwać się macierzami kwadratowymi. W naszym przypadku będą one wyglądać następująco:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Każdej macierzy kwadratowej można przypisać pewną liczbę, którą nazywa się wyznacznikiem.

Definicja 5.

Wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nazywamy liczbę $ad - cb$, którą oznaczamy $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Mamy więc $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$

Przykład 2.

Obliczymy:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$

Ad a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$$

Ad b)

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 6 - 0 \cdot 5 = -6 - 0 = -6$$

Ad c)

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-6) - 3 \cdot (-8) = -24 + 24 = 0$$

Wróćmy do naszego układu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi

$$(*) \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & a_1^2 + b_1^2 > 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & a_2^2 + b_2^2 > 0 \end{cases}$$

i wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik W nazywamy wyznacznikiem głównym układu równań (*).

Rozwiążemy teraz układ równań (*), stosując metodę przeciwnych współczynników. W celu wyznaczenia x mnożymy pierwsze równanie układu (*) przez b_2, a drugie równanie układu (*) przez $(-b_1)$ i dodajemy stronami otrzymane w ten sposób równania

$$+\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -c_2b_1 \end{cases}$$

$$\overline{a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1,$$

Możemy to zapisać krócej

$$W \cdot x = W_x$$

Aby wyznaczyć y, mnożymy pierwsze równanie układu (*) przez $(-a_2)$, natomiast drugie równanie układu (*) – przez a_1, i dodajemy stronami otrzymane w ten sposób równania. Wówczas mamy (sprawdź!):

$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$, czyli

$$W \cdot y = W_y$$

Możemy zapisać dwa układy równań

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ W \cdot x = W_x \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ W \cdot y = W_y \end{cases}$$

które są równoważne układowi (*) (zobacz twierdzenie 2.).
Zatem wnioskujemy, że:

a) jeśli $W \neq 0$, to układ równań (*) jest oznaczony, czyli ma tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$$

b) jeśli $W = W_x = W_y = 0$, to układ równań (*) jest nieoznaczony, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań;

c) jeśli $W = 0$ i co najmniej jeden z wyznaczników W_x, W_y jest różny od zera, to układ równań (*) jest sprzeczny, czyli nie ma rozwiązań.

UWAGA: Powyższe rozważania były prowadzone przy założeniu, że wszystkie współczynniki a_1, b_1, a_2, b_2 są różne od zera. Łatwo sprawdzić bezpośrednio, że wszystkie wnioski są prawdziwe również w przypadku, gdy jeden ze współczynników a_1, b_1 lub jeden ze współczynników a_2, b_2 jest równy zeru.

Otrzymaliśmy więc twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & a_1^2 + b_1^2 > 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & a_2^2 + b_2^2 > 0 \end{cases}$$

a) ma tylko jedno rozwiązanie, jeśli $W \neq 0$

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$$

b) ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli $W = W_x = W_y = 0$

c) nie ma rozwiązań, jeśli $W = 0 \wedge (W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0)$,

gdzie $W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Jeśli wyznacznik główny W układu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi jest różny od zera, to układ ten nazywamy **układem Cramera**, a wzory $\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$ – **wzorami Cramera**.

Wzory te podał w 1750 r. matematyk szwajcarski Gabriel Cramer.

Przykład 3.

Rozwiążemy układ równań:

a) $\begin{cases} 9x - 12y = 16 \\ -17x + 51y = -19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{3}-2)y = \sqrt{3}+2 \\ (\sqrt{3}+2)x + (\sqrt{2}+1)y = \sqrt{2}-1 \end{cases}$

Ad a) Obliczamy wyznaczniki układu równań:

$$W = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -17 & 51 \end{vmatrix} = 9 \cdot 51 - (-17) \cdot (-12) = 459 - 204 = 255$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 16 & -12 \\ -19 & 51 \end{vmatrix} = 16 \cdot 51 - (-19) \cdot (-12) = 816 - 228 = 588$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 9 & 16 \\ -17 & -19 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-19) - (-17) \cdot 16 = -171 + 272 = 101$$

Zatem, na podstawie twierdzenia 3. ze str. 51, mamy

$$\begin{cases} x = \dfrac{588}{255} \\ y = \dfrac{101}{255} \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = 2\dfrac{26}{85} \\ y = \dfrac{101}{255} \end{cases}$$

Ad b) Postępujemy podobnie jak w punkcie a).

$$W = \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{3}-2 \\ \sqrt{3}+2 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2) = (2-1) - (3-4) = 2$$

$$W_x = \begin{vmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3}+2)(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-2) =$$
$$= (\sqrt{6}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2) - (\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2) = 2(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$

$$W_y = \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}+2 & \sqrt{2}-1 \end{vmatrix} = (\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{3}+2)^2 = (2-2\sqrt{2}+1) - (3+4\sqrt{3}+4) =$$
$$= -2(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)$$

Zatem

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}{2} \\ y = \dfrac{-2\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\right)}{2} \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}+2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2 \end{cases}$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż metodą podstawiania następujący układ równań: $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$

2. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników układ równań: $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5x + 6y = 11 \end{cases}$

3. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$, korzystając z wykresów tych równań.

4. Wskaż, który z poniższych układów jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny. Podaj ich zbiory rozwiązań.

   a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = -2y + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x + 5y = 3 \end{cases}$

5. Dopisz brakujące równanie układu tak, aby powstały układ równań:

   a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ był sprzeczny

   b) $\begin{cases} x + 5y = 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ był nieoznaczony

   c) $\begin{cases} x + y = 8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ był oznaczony.

6. Stosując wyznaczniki, rozwiąż układ równań:

   a) $\begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 10y = 11 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

Omówione w poprzednim temacie twierdzenie 3. jest bardzo przydatne do badania układów równań pierwszego stopnia z parametrem.

Przykład 1.

Przeprowadzimy dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = m+1 \end{cases} \qquad (*)$$

ze względu na parametr m ($m \in \boldsymbol{R}$).

Obliczamy wyznaczniki W, W_x, W_y:

$$W = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \qquad W_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m - (m+1) = m - 1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = m^2 + m - 1 - 1 = (m^2 - 1) + (m-1) =$$

$$= (m-1)(m+1) + (m-1) = (m-1)(m+2)$$

Sprawdzamy, kiedy układ równań (*) ma tylko jedno rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem 3. ze str. 51 ma być spełniony warunek $W \neq 0$. Mamy zatem:

$$W \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (m \neq 1 \wedge m \neq -1)$$

Tak więc, jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, to rozwiązanie układu równań (*) ma postać:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m-1}{(m-1)(m+1)} \\ y = \dfrac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{m+1} \\ y = \dfrac{m+2}{m+1} \end{cases}$$

Pozostają do zbadania dwa przypadki: 1° $m = 1$ oraz 2° $m = -1$.

1° Jeśli $m = -1$, to otrzymujemy: $W = 0$, $W_x = -2$, $W_y = -2$.

Zatem układ równań (*) jest sprzeczny. Przyjmuje postać: $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2° Jeśli $m = 1$, to układ równań (*) jest nieoznaczony. Przyjmuje postać: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Podsumujmy:

Jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, to układ równań (*) spełnia tylko jedna para liczb $\left(\dfrac{1}{m+1}, \dfrac{m+2}{m+1}\right)$;

jeśli $m = -1$, to układ równań (*) nie ma rozwiązań;

jeśli $m = 1$, to układ równań (*) spełnia nieskończenie wiele par liczb mających postać $(x, 2-x)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wartości parametru k, dla których rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 3x - 4y = |k| - 2k + 1 \\ -6x + 6y = 3k - 2|k| \end{cases} \qquad (*)$$

jest para liczb o takich samych znakach.

Obliczamy wyznaczniki W, W_x, W_y:

$$W = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6$$

$$W_x = \begin{vmatrix} |k| - 2k + 1 & -4 \\ 3k - 2|k| & 6 \end{vmatrix} = 6|k| - 12k + 6 - 8|k| + 12k = 6 - 2|k|$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 3 & |k| - 2k + 1 \\ -6 & 3k - 2|k| \end{vmatrix} = 9k - 6|k| + 6|k| - 12k + 6 = 6 - 3k$$

Ponieważ wyznacznik W jest różny od zera, więc układ równań (*) ma tylko jedno rozwiązanie $\left(\frac{1}{3}|k| - 1, \frac{1}{2}k - 1\right)$ dla dowolnej wartości parametru k. Liczby $\frac{1}{3}|k| - 1$ oraz $\frac{1}{2}k - 1$ mają mieć takie same znaki, to znaczy obie mają być dodatnie albo obie ujemne. Prowadzi to nas do alternatywy warunków:

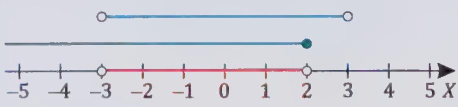
$$\left(\frac{1}{3}|k| - 1 > 0 \wedge \frac{1}{2}k - 1 > 0\right) \vee \left(\frac{1}{3}|k| - 1 < 0 \wedge \frac{1}{2}k - 1 < 0\right)$$

Mamy zatem

$$[(|k| > 3 \wedge k > 2) \qquad \vee \qquad (|k| < 3 \wedge k < 2)] \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{[k \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \wedge k \in (2, +\infty)] \vee [k \in (-3, 3) \wedge k \in (-\infty, 2)]\}$$

$(3, +\infty)$



$(-3, 2)$

Rozwiązaniem układu równań (*) jest para liczb o takich samych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (-3, 2) \cup (3, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań z parametrem m, gdzie $m \in \mathbf{R}$.

a) $\begin{cases} 3x - y = m \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x - my = 2 \\ x + my = 2m \end{cases}$

Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych

Układy równań liniowych są bardzo pomocne w rozwiązywaniu wielu zadań tekstowych. Tok rozwiązywania takich zadań składa się wówczas z następujących etapów:

1. Analiza treści zadania.
2. Ułożenie i rozwiązanie układu równań.
3. Sprawdzenie poprawności rozwiązania z treścią zadania.
4. Sformułowanie odpowiedzi.

Poszczególne etapy omówimy na konkretnych przykładach. Pierwszy z nich dotyczy postaci historycznej.

Aleksander Wielki urodził się w 356 roku przed Chrystusem. Bardzo wcześnie został królem Macedonii. W wyniku licznych wypraw i podbojów stał się twórcą potężnego i rozległego imperium. Chociaż zmarł młodo, jego imię na zawsze zapisało się na kartach historii.

Przykład 1.

Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, panowałby przez $\frac{1}{4}$ swego życia; gdyby żył o 9 lat dłużej, panowałby przez połowę swego życia. Ile lat żył i panował ten słynny Macedończyk?

Analiza:

x – długość życia Aleksandra Wielkiego (w latach)
y – liczba lat panowania Aleksandra Wielkiego
Zgodnie z treścią zadania musimy rozważyć dwie sytuacje hipotetyczne.

Gdyby król umarł o 5 lat wcześniej, toby żył i panował o 5 lat krócej.	Gdyby król umarł o 9 lat później, toby żył i panował o 9 lat dłużej.
$x-5$ – długość życia króla; $y-5$ – liczba lat panowania króla; $\frac{1}{4}(x-5)$ – liczba lat panowania, wyrażona jako czwarta część długości życia króla; $y-5=\frac{1}{4}(x-5)$ – pierwsze równanie	$x+9$ – długość życia króla; $y+9$ – liczba lat panowania króla; $\frac{1}{2}(x+9)$ – liczba lat panowania, wyrażona jako połowa długości życia króla; $y+9=\frac{1}{2}(x+9)$ – drugie równanie

Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} y-5=\frac{1}{4}(x-5) \quad / \cdot 4 \\ y+9=\frac{1}{2}(x+9) \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y-20=x-5 \\ 2y+18=x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+4y=15 \\ -x+2y=-9 \quad / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -x+4y=15 \\ x-2y=9 \end{cases}$$
$$2y=24$$

$$\begin{cases} y=12 \\ x-2\cdot 12=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=12 \\ x=33 \end{cases}$$

Sprawdzenie:

Aleksander Wielki żył 33 lata, a panował 12 lat. Gdyby żył o 5 lat krócej, wówczas umarłby, mając 28 lat (33 – 5). Okres panowania wynosiłby wówczas 7 lat (12 – 5), co stanowiłoby $\frac{1}{4}$ życia króla. Gdyby Aleksander Wielki żył o 9 lat dłużej, czyli 42 lata (33 + 9), wówczas panowałby 21 lat (12 + 9), a zatem przez połowę swego życia.

Odpowiedź: Aleksander Wielki żył 33 lata, a panował przez 12 lat.

Drugi przykład dotyczy funduszy inwestycyjnych. Fundusz inwestycyjny jest formą zbiorowego lokowania środków pieniężnych, wpłaconych przez przedsiębiorstwa, gminy, różne firmy, ale także przez osoby prywatne. Majątek funduszu inwestycyjnego tworzy znaczny kapitał, który umożliwia osiąganie zysków wyższych niż tradycyjna lokata bankowa.

Przykład 2.

Pan Nowak i pan Kowalski ulokowali swoje oszczędności w różnych funduszach inwestycyjnych: pierwszy – kwotę 1500 zł w funduszu „Skarbczyk", natomiast drugi – kwotę 1200 zł w funduszu „Twój Zysk". Po roku okazało się, że obaj panowie zarobili na tych inwestycjach łącznie 630 zł, ale roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk" był o 3 punkty procentowe wyższy niż roczny zysk procentowy funduszu „Skarbczyk". Oblicz, jaki zysk procentowy osiągnął każdy z funduszy w ciągu roku.

Analiza:

x – roczny zysk procentowy funduszu „Skarbczyk"
y – roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk"
$x + 3$ – roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk"
$y = x + 3$ – pierwsze równanie
$\frac{x}{100} \cdot 1500$, czyli $15x$ – kwota, jaką zarobił na inwestycji pan Nowak (w zł)
$\frac{y}{100} \cdot 1200$, czyli $12y$ — kwota, jaką zarobił na inwestycji pan Kowalski (w zł)
$15x + 12y$ – łączna kwota zysku obu panów, równa 630 zł
$15x + 12y = 630$ – drugie równanie

Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 15x + 12y = 630 \quad /:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 5x + 4y = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 5x + 4(x + 3) = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 5x + 4x + 12 = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 9x = 198 \quad /:9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 22 \\ y = 25 \end{cases}$$

Sprawdzenie:

Roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk" wyniósł 25%, a funduszu „Skarbczyk" był równy 22%, więc zysk funduszu „Twój Zysk" był o 3 punkty procentowe wyższy od zysku funduszu „Skarbczyk". Po roku pan Nowak zyskał 330 zł (0,22 · 1500 zł), a pan Kowalski zyskał 300 zł (0,25 · 1200 zł), co daje łączną kwotę zysku 630 zł.

Odpowiedź:

Roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk" wyniósł 25%, a funduszu „Skarbczyk" był równy 22%.

Kolejny przykład dotyczy prędkości w ruchu jednostajnym prostoliniowym.
Woda w rzece płynie w kierunku ujścia rzeki z prędkością, którą – na niezbyt długim odcinku – możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$v\,[\text{prędkość}] = \frac{s\,[\text{długość drogi}]}{t\,[\text{czas}]}$$

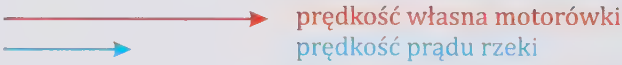
W tym celu mierzymy czas, w jakim patyk płynie z prądem rzeki wzdłuż wcześniej wyznaczonej drogi, między wybranymi punktami na brzegu rzeki.

Przykład 3.

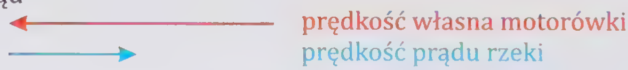
Odległość między przystaniami A i B wynosi 120 km. Z przystani A wypłynęła motorówka i płynąc z prądem rzeki, dopłynęła do przystani B po 2 godzinach. Drogę powrotną ta sama motorówka pokonała w ciągu 2,5 godziny. Obliczymy prędkość własną motorówki i prędkość prądu rzeki.

Rozwiązanie:

Podróż z prądem



Podróż pod prąd



Zauważ, że:

1) prędkość własna motorówki to prędkość, z jaką płynie ona po wodzie stojącej, np. po jeziorze;
2) motorówka, płynąc z prądem rzeki, rozwija prędkość większą od prędkości własnej o wartość prędkości prądu rzeki (rzeka „pomaga");
3) motorówka, płynąc pod prąd, rozwija prędkość mniejszą od prędkości własnej o wartość prędkości prądu rzeki (rzeka „przeszkadza").

Analiza:

x – prędkość własna motorówki (km/h)
y – prędkość prądu rzeki (km/h)
$x + y$ – prędkość motorówki płynącej z prądem (km/h)

$(x+y) \cdot 2$ – odległość między przystaniami (w km), obliczona ze wzoru $s = v \cdot t$
120 – dana odległość między przystaniami (w km)
$(x+y) \cdot 2 = 120$ – pierwsze równanie
$x-y$ – prędkość motorówki płynącej pod prąd (w km/h)
$(x-y) \cdot 2{,}5$ – odległość między przystaniami (w km)
120 – odległość między przystaniami (w km)
$(x-y) \cdot 2{,}5 = 120$ – drugie równanie

Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases}(x+y)\cdot 2 = 120 & /:2\\ (x-y)\cdot 2{,}5 = 120 & /:2{,}5\end{cases}$$

$$+\begin{cases}x+y=60\\ x-y=48\end{cases}$$

$$2x = 108$$

$$\begin{cases}x+y=60\\ 2x=108 & /:2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=60\\ x=54\end{cases}$$

$$\begin{cases}54+y=60\\ x=54\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=54\\ y=6\end{cases}$$

Sprawdzenie:

Motorówka, płynąc z prądem rzeki, rozwinęła prędkość 60 km/h (54 km/h + 6 km/h). Zatem w ciągu 2 godzin pokonała drogę równą 120 km (60 km/h · 2 h), równą odległości między przystaniami. W drodze powrotnej jej prędkość wynosiła 48 km/h (54 km/h – 6 km/h), więc odległość między przystaniami pokonała w czasie 2,5 h (120 km : 48 km/h).

Odpowiedź:

Prędkość własna motorówki wynosiła 54 km/h, a prędkość prądu rzeki była równa 6 km/h.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dwóch pasterzy ma razem 585 owiec. Jeśli pierwszy sprzeda drugiemu 23 owce, to drugi będzie miał cztery razy więcej owiec niż pierwszy. Ile owiec ma każdy pasterz?
2. Przed 10 laty ojciec był dziesięć razy starszy od syna. Za 11 lat będą mieć razem 75 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich?
3. Pani Nowakowa założyła w banku A roczną lokatę terminową w wysokości 5000 zł. Natomiast pani Kowalska założyła w banku B roczną lokatę terminową w wysokości 3000 zł. Kapitalizacja odsetek odbywa się w obu bankach na koniec okresu oszczędzania. Oprocentowanie lokaty rocznej w banku A jest o 2 punkty procentowe niższe niż w banku B. Wiedząc, że obie panie zyskały łącznie po roku oszczędzania 1020 zł (pomijamy podatek od zysków kapitałowych), oblicz oprocentowanie każdej lokaty.
4. Samolot, lecąc z wiatrem, pokonał trasę z jednego do drugiego miasta w ciągu 3 godzin 45 minut, a drogę powrotną (pod wiatr) w czasie 4 godzin. Oblicz odległość między tymi miastami, jeśli prędkość wiatru wynosiła 10 km/h.

Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i jej interpretacja geometryczna. Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi

Rozpatrzmy wyrażenia zapisane w tabeli:

zapis słowny	zapis symboliczny
Suma podwojonej liczby x i liczby y jest większa od czterech.	$2x+y>4$
Suma liczb x i y jest nie większa od dwóch.	$x+y\leqslant 2$
Różnica liczby y i liczby 3 jest mniejsza od liczby x.	$y-3<x$
Różnica 9% liczby x i 25% liczby y jest nie mniejsza od pięciu.	$0{,}09x-0{,}25y\geqslant 5$

Powyższe zależności są przykładami nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Definicja 1.
Nierównością pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy każdą nierówność, którą można przedstawić w postaci:

$$ax+by<c \qquad ax+by>c \qquad ax+by\leqslant c \qquad ax+by\geqslant c,$$

gdzie a i b nie są jednocześnie zerami.

Przykład 1.

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczymy zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają poniższe nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

a) $2x-y\geqslant 6$ b) $y>-\frac{1}{2}x$ c) $y-3\leqslant 0$ d) $x>2$

Zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, będziemy nazywać **wykresem** tej **nierówności**.

Ad a)

Nierówność $2x-y\geqslant 6$ przekształcamy równoważnie do postaci $y\leqslant 2x-6$. Rozpatrujemy najpierw równanie $y=2x-6$. Jego wykresem w układzie współrzędnych jest prosta. Współrzędne punktów prostej spełniają nierówność $y\leqslant 2x-6$ (dlaczego?), więc punkty prostej należą do szukanego zbioru. Zatem tę prostą oznaczamy linią ciągłą. Ponadto omawiana prosta dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Na jednej z tych półpłaszczyzn (poza prostą) znajdują się wszystkie punkty, których współrzędne spełniają nierówność

$y<2x-6,$

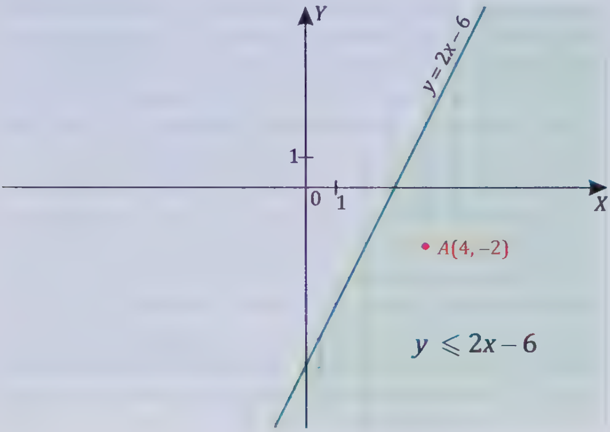
a na drugiej wszystkie te punkty, których współrzędne spełniają nierówność

$y>2x-6$

Aby wskazać odpowiednią półpłaszczyznę, wybieramy dowolny punkt poza prostą, np. $A(4, -2)$. Następnie sprawdzamy, czy współrzędne punktu A spełniają nierówność $y \leqslant 2x - 6$. Mamy:

$L = -2; \quad P = 2 \cdot 4 - 6 = 8 - 6 = 2, \quad$ czyli $-2 \leqslant 2$.

Otrzymaliśmy zdanie prawdziwe. Zatem zaznaczamy tę półpłaszczyznę, do której należy punkt $A(4, -2)$.



Ad b)

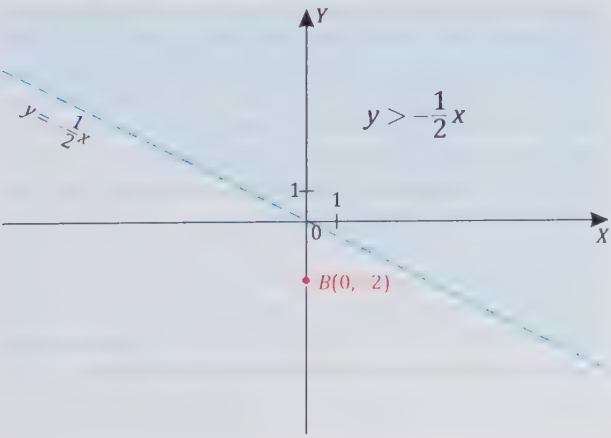
Nierówność $y > -\frac{1}{2}x$ spełniają współrzędne wszystkich punktów, które należą do jednej z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą $y = -\frac{1}{2}x$. Punkty prostej $y = -\frac{1}{2}x$ nie należą do szukanego wykresu nierówności (dlaczego?). Zatem krawędź półpłaszczyzny przedstawimy na rysunku linią przerywaną. Następnie wybieramy np. punkt $B(0, -2)$ i sprawdzamy, czy jego współrzędne spełniają nierówność

$$y > -\frac{1}{2}x$$

Otrzymujemy:

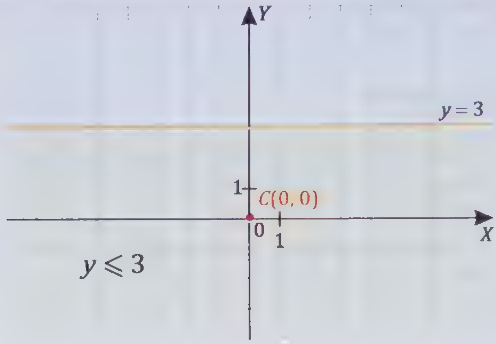
$L = -2; \quad P = 0, \quad$ a więc nierówność $-2 > 0$ jest zdaniem fałszywym.

Wykresem nierówności jest ta półpłaszczyzna, do której nie należy punkt B.



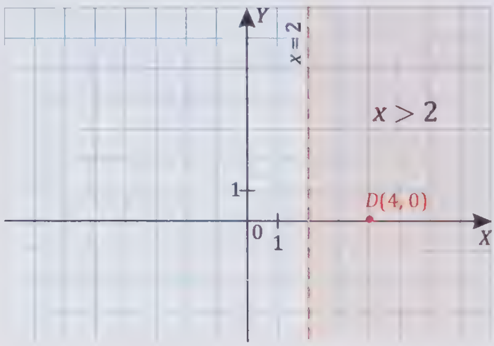
Ad c)

Nierówność $y-3 \leqslant 0$ przekształcamy do postaci $y \leqslant 3$. Szkicujemy prostą o równaniu $y=3$ linią ciągłą. Współrzędne punktu $C(0, 0)$ spełniają nierówność $y \leqslant 3$, bo $0 \leqslant 3$. Wykresem nierówności $y \leqslant 3$ jest półpłaszczyzna pod prostą $y=3$, wraz z tą prostą.



Ad d)

Szkicujemy prostą o równaniu $x=2$ linią przerywaną. Współrzędne punktu $D(4, 0)$ spełniają nierówność $x > 2$. Wykresem nierówności $x > 2$ jest półpłaszczyzna na prawo od prostej $x=2$, bez tej prostej.



Twierdzenie 1.

Wykresem nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest jedna z półpłaszczyzn (z krawędzią, jeśli nierówność jest nieostra, lub bez krawędzi, jeśli nierówność jest ostra), wyznaczona przez prostą o równaniu $ax + by = c$.

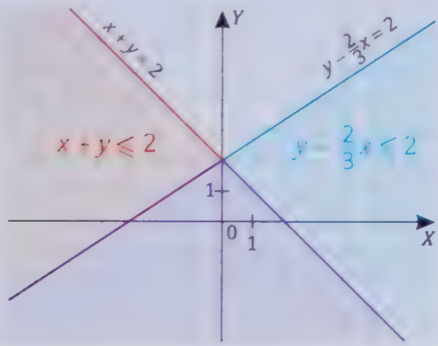
Układ nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi to koniunkcja tych nierówności. Zbiorem rozwiązań układu nierówności jest część wspólna zbioru rozwiązań poszczególnych nierówności układu.

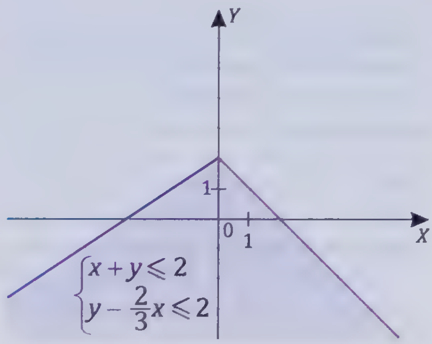
Przykład 2.

Wyznaczmy na płaszczyźnie w prostokątnym układzie współrzędnych zbiór tych punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 2 \ \ (1) \\ y - \frac{2}{3}x \leqslant 2 \ \ (2) \end{cases}$$

Na pierwszym rysunku zaznaczyliśmy kolorem czerwonym wykres nierówności (1), a kolorem niebieskim – wykres nierówności (2). Wspólna część obu wykresów jest zaznaczona kolorem fioletowym.
Zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności, jest kąt zaznaczony na rysunku drugim.

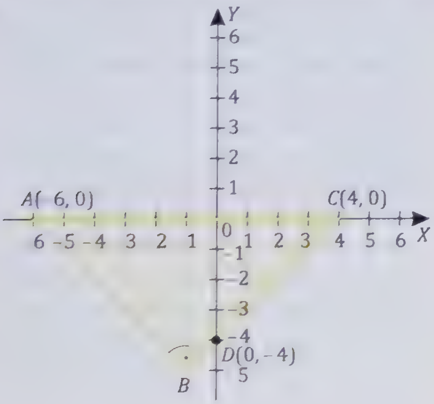




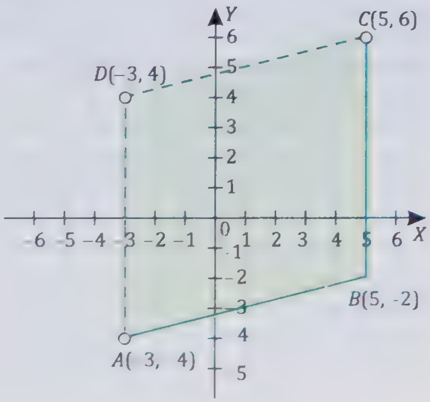
Przykład 3.

Na poniższych rysunkach przedstawione są dwie figury geometryczne. Opiszemy je za pomocą odpowiednich układów nierówności.

a)



b)



Ad a)
Zauważmy, że dane są wierzchołki $A(-6, 0)$ i $C(4, 0)$ trójkąta ABC oraz punkt $D(0, -4)$, należący do boku BC. Ponadto trójkąt ABC jest prostokątny. Wyznaczymy równania prostych, zawierających boki trójkąta ABC.
Bok AC zawiera się w prostej o równaniu $y = 0$.
Bok BC zawiera się w prostej przechodzącej przez punkt $C(4, 0)$ i przecinającej oś OY w punkcie $D(0, -4)$. Ta prosta jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$. Zatem

z własności funkcji liniowej wynika, że $b = -4$ oraz $-\frac{b}{a} = 4$ (ze wzoru na miejsce zerowe funkcji liniowej). Stąd otrzymujemy:

$a = 1, \quad b = -4$, więc prosta CD ma równanie

$y = x - 4$

Bok AB zawiera się w prostej prostopadłej do boku BC i przechodzącej przez punkt $(-6, 0)$. Zatem równanie prostej AB jest postaci:

$y = -x - 6$ (dlaczego?)

Trójkąt ABC jest częścią wspólną trzech półpłaszczyzn wyznaczonych przez:

- prostą AC i punkt B
- prostą BC i punkt A
- prostą AB i punkt C

Pierwsza półpłaszczyzna jest wykresem nierówności $y \leqslant 0$.

Druga półpłaszczyzna jest wykresem nierówności $y \geqslant x - 4$.

Trzecia półpłaszczyzna jest wykresem nierówności $y \geqslant -x - 6$.

Trójkąt ABC można więc opisać układem nierówności:

$$\begin{cases} y \leqslant 0 \\ y \geqslant x - 4 \\ y \geqslant -x - 6 \end{cases}$$

Ad b)

Zauważmy, że proste, w których zawierają się boki AD i BC czworokąta, są równoległe do osi OY układu. Prosta AD ma równanie

$x = -3$,

a prosta BC ma równanie

$x = 5$

Równanie prostej AB wyznaczymy, korzystając z faktu, że jest ona wykresem funkcji liniowej i przechodzi przez punkty $A(-3, -4)$ oraz $B(5, -2)$. Otrzymujemy:

$y = \frac{1}{4}x - 3\frac{1}{4}$ (sprawdź!)

Podobnie można wyznaczyć równanie prostej DC. Można też zauważyć, że $AB \parallel BC$ (bo $\vec{AB} = \overrightarrow{DC}$). Wówczas współczynnik kierunkowy prostej DC jest równy $\frac{1}{4}$, a wyraz wolny wyznaczamy, wykorzystując współrzędne punktu D lub C. Prosta DC ma równanie

$y = \frac{1}{4}x + 4\frac{3}{4}$

Odcinki AD i DC nie zawierają się w danej figurze, więc figurę $ABCD$ opisuje układ nierówności:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \leqslant 5 \\ y \geqslant \frac{1}{4}x - 3\frac{1}{4} \\ y < \frac{1}{4}x + 4\frac{3}{4} \end{cases}$$, co krócej można zapisać następująco: $$\begin{cases} -3 < x \leqslant 5 \\ \frac{1}{4}x - 3\frac{1}{4} \leqslant y < \frac{1}{4}x + 4\frac{3}{4} \end{cases}$$

Sprawdź, czy rozumiesz

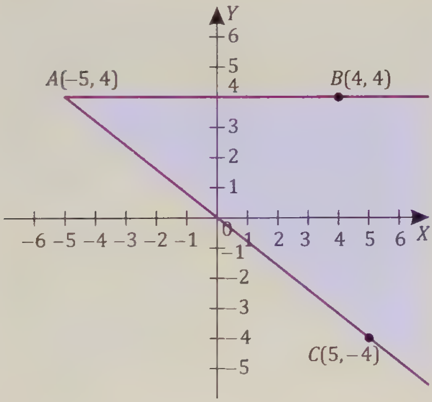
1. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych wszystkich punktów, których współrzędne spełniają następujące nierówności:

a) $2x - y \leqslant 4$ b) $x - y > 0$ c) $\frac{1}{2}x + y \geqslant 3$

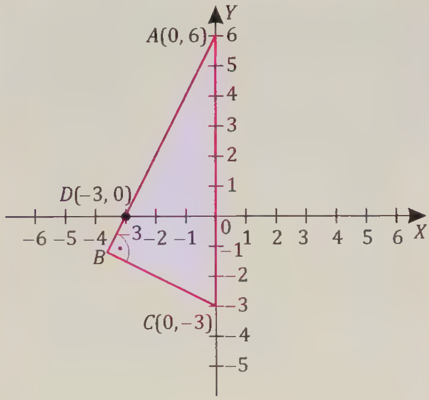
d) $x - 2 \leqslant 5$ e) $y - 1 > 3$ f) $x + 2y \leqslant 8$

2. Opisz figury przedstawione na rysunkach za pomocą układów nierówności.

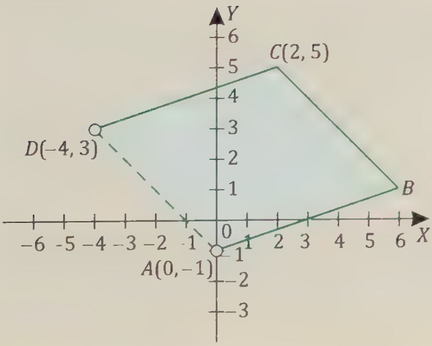
a) kąt



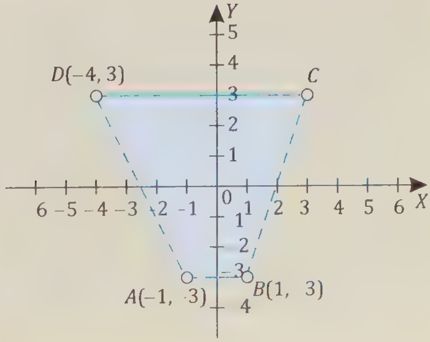
b) trójkąt



c) $AB \parallel DC$
$DA \parallel CB$



d) $AB \parallel DC$



Zastosowanie układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań

Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi (lub z większą liczbą niewiadomych) mają duże znaczenie w rozwiązywaniu pewnej grupy problemów praktycznych dotyczących np. planowania produkcji tak, aby osiągnąć maksymalny zysk przy optymalnym wykorzystaniu posiadanych zasobów.

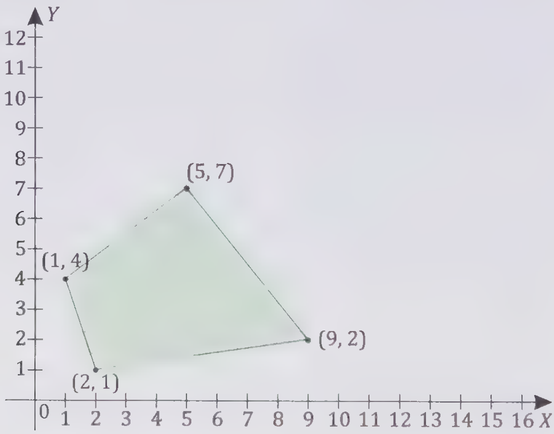
Zanim omówimy przykład takiego zagadnienia, rozważmy następujące zadanie teoretyczne.

Niech dana będzie funkcja $f(x, y) = 3x + 4y - 2$. Jest to przykład funkcji liniowej dwóch zmiennych. Argumentami tej funkcji są uporządkowane pary liczb (które będziemy utożsamiać z punktami), a wartościami funkcji f są liczby rzeczywiste, np. dla argumentu $(5, 2)$ mamy

$f(5, 2) = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 2$, czyli

$f(5, 2) = 21$

Rozważmy też następujący obszar (który jest wielokątem wypukłym) w układzie współrzędnych.



Załóżmy też, że współrzędne punktów z zaznaczonego obszaru są argumentami funkcji f. Interesuje nas wyznaczenie takich punktów – z zaznaczonego obszaru – dla których funkcja f przyjmuje największą oraz najmniejszą wartość.

Oczywiste jest, że funkcja f będzie przyjmować największą (odpowiednio najmniejszą) wartość tylko wtedy, gdy wyrażenie $3x + 4y$ będzie przyjmować największą (odpowiednio najmniejszą) wartość. Rozpatrzmy zatem wyrażenie

$3x + 4y = m,$

co możemy zapisać

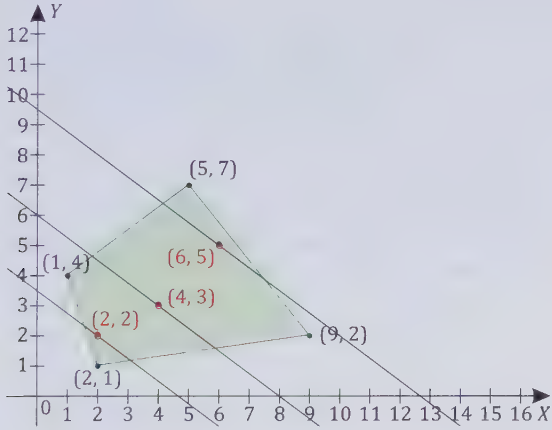
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{m}{4} \qquad (*)$$

Wyrażenie (*) możemy potraktować jako równanie prostej, gdzie m jest parametrem. Do rozpatrywanego obszaru należy punkt (4, 3). Mamy wówczas $m = 24$ $(3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24)$, a równanie prostej przyjmuje postać:

$$y = -\frac{3}{4}x + 6 \qquad (1)$$

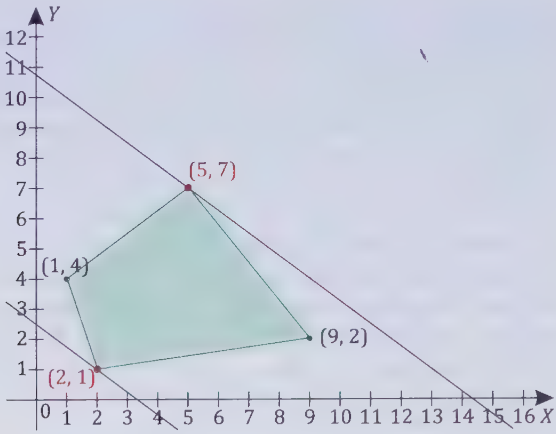
Liczba 24 nie jest ani największą, ani najmniejszą wartością wyrażenia $3x + 4y$. Na przykład jeśli weźmiemy punkt (2, 2), to otrzymamy wartość mniejszą, $m = 14$ $\left(\text{równanie prostej } y = -\frac{3}{4}x + \frac{14}{4} \quad (2)\right)$, jeśli natomiast weźmiemy punkt (6, 5) – otrzymamy wartość większą, $m = 38$ $\left(\text{równanie prostej } y = -\frac{3}{4}x + \frac{38}{4} \quad (3)\right)$.

Naszkicujmy proste (1), (2), (3) w układzie współrzędnych.



Przedstawione powyżej proste są równoległe (mają taki sam współczynnik kierunkowy). Z dotychczasowej analizy wyłania się geometryczny sposób wyznaczenia największej i najmniejszej wartości m (a zatem i największej i najmniejszej wartości funkcji f).

Aby wyznaczyć największą wartość m (największą wartość funkcji f) w rozpatrywanym obszarze, wystarczy poprowadzić – przez punkt należący do danego wielokąta wypukłego – prostą o współczynniku kierunkowym $-\frac{3}{4}$, która „możliwie najwyżej" przetnie oś OY; natomiast aby wyznaczyć najmniejszą wartość m (najmniejszą wartość funkcji f) w rozpatrywanym obszarze, wystarczy poprowadzić – przez punkt należący do danego wielokąta wypukłego – prostą o współczynniku kierunkowym $-\frac{3}{4}$, która „możliwie najniżej" przetnie oś OY.



Zauważ, że zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku otrzymujemy punkty, które są wierzchołkami wielokąta: w przypadku wartości największej jest to punkt (5, 7), w przypadku wartości najmniejszej jest to punkt (2, 1).
Zatem funkcja $f(x) = 3x + 4y - 2$, określona w podanym obszarze, przyjmuje największą wartość w punkcie (5, 7) i ta wartość jest równa 41, a najmniejszą wartość w punkcie (2, 1) i ta wartość jest równa 8.

Można wykazać, że jeśli funkcja liniowa dwóch zmiennych jest określona w obszarze będącym wielokątem wypukłym, to przyjmuje wartość największą i wartość najmniejszą, przy czym każda z tych wartości jest przyjmowana w pewnym wierzchołku danego wielokąta wypukłego.

Przykład 1.

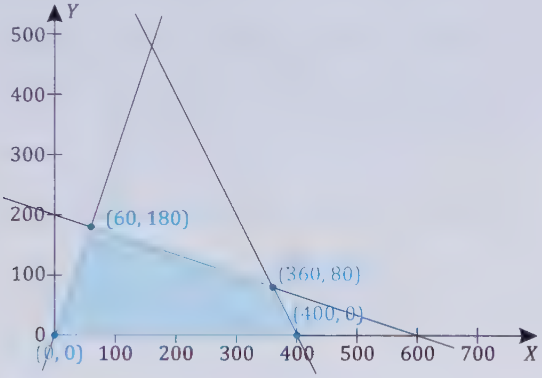
Mały zakład włókienniczy produkuje dwa rodzaje swetrów (damskie i męskie) z dwóch rodzajów wełny (czarnej i białej). Do produkcji jednego swetra damskiego potrzeba 20 dag wełny czarnej i 40 dag wełny białej, a do produkcji swetra męskiego – 60 dag wełny czarnej i 20 dag wełny białej. Zasoby wełny czarnej wynoszą 120 kg (12 000 dag), natomiast białej – 160 kg (16 000 dag). Zysk osiągany ze sprzedaży swetra męskiego wynosi 70 zł, a ze sprzedaży swetra dla pań – 100 zł. Ile swetrów każdego rodzaju powinien wyprodukować ten zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk, przy uwzględnieniu zarządzenia dyrektora zakładu, mówiącego, że liczba swetrów męskich ma być nie większa niż trzykrotność liczby swetrów damskich?

Oznaczmy:
- x – liczba swetrów damskich
- y – liczba swetrów męskich

Warunki zadania opisuje następujący układ nierówności:

$$\begin{cases} 20x + 60y \leqslant 12\,000 & \text{(zasoby wełny czarnej ograniczone są przez 120 kg)} \\ 40x + 20y \leqslant 16\,000 & \text{(zasoby wełny białej ograniczone są przez 160 kg)} \\ y \leqslant 3x \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Zysk planowany ze sprzedaży swetrów określa funkcja ZYSK$(x, y) = 100x + 70y$.
W układzie współrzędnych zaznaczamy część wspólną półpłaszczyzn opisanych przez nierówności z powyższego układu.



Otrzymujemy czworokąt wypukły o wierzchołkach: (0, 0), (400, 0), (360, 80), (60, 180) – sprawdź! Funkcja ZYSK jest funkcją liniową dwóch zmiennych. Będzie przyjmować największą wartość – zgodnie z tym, co powiedzieliśmy wcześniej – w wierzchołku czworokąta. Obliczamy:

ZYSK$(0, 0) = 100 \cdot 0 + 70 \cdot 0$, czyli ZYSK$(0, 0) = 0$
ZYSK$(400, 0) = 100 \cdot 400 + 70 \cdot 0$, czyli ZYSK$(400, 0) = 40\,000$
ZYSK$(360, 80) = 100 \cdot 360 + 70 \cdot 80$, czyli ZYSK$(360, 80) = 41\,600$
ZYSK$(60, 180) = 100 \cdot 60 + 70 \cdot 180$, czyli ZYSK$(60, 180) = 18\,600$.

Zakład powinien wyprodukować 360 swetrów damskich oraz 80 swetrów męskich. Produkcja taka zapewni firmie maksymalny zysk w wysokości 41 600 zł.

Zbadaj, ile razy cena swetra męskiego powinna być większa od ceny swetra damskiego, aby – zachowując pozostałe ograniczenia – najbardziej opłacało się wyprodukować 60 swetrów damskich i 180 swetrów męskich.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:
   a) $f(x, y) = 10x - 5y + 2$ b) $f(x, y) = 2x + 8y$
   w obszarze opisanym przez układ nierówności:
$$\begin{cases} -x + 2y \leqslant 6 \\ x + y \leqslant 12 \\ x \geqslant 2 \\ x \leqslant 10 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Funkcja kwadratowa

Własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$

Definicja 1.
Funkcją kwadratową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Liczby rzeczywiste a, b oraz c nazywamy współczynnikami funkcji kwadratowej. Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Wzór $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej**.

W poniższej tabeli przedstawione są wzory funkcji kwadratowych w ogólnej postaci, wraz z wyszczególnionymi współczynnikami tych funkcji.

Wzór funkcji kwadratowej	Współczynniki		
	a	b	c
$y = 5x^2$	5	0	0
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$	$-\frac{1}{2}$	-3	0
$y = \sqrt{2}x^2 + 9$	$\sqrt{2}$	0	9
$y = -x^2 - 7x + \frac{3}{4}$	-1	-7	$\frac{3}{4}$

W tym temacie zajmiemy się własnościami funkcji kwadratowej, którą można opisać wzorem mającym postać $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$.

Przykład 1.

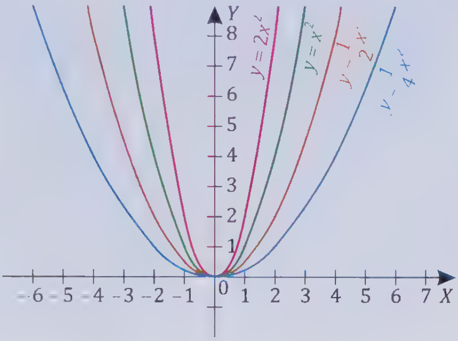
W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicujemy wykresy funkcji kwadratowych:

a) $y = 2x^2$ $\quad y = x^2$ $\quad y = \frac{1}{2}x^2$ $\quad y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = -2x^2$ $\quad y = -x^2$ $\quad y = -\frac{1}{2}x^2$ $\quad y = -\frac{1}{4}x^2$

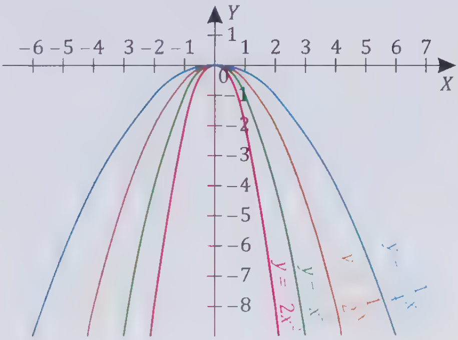
W naszkicowaniu wykresów funkcji pomogą Ci tabelki częściowe tych funkcji. Im więcej punktów umieścisz w tabelce, tym dokładniejszy otrzymasz wykres. Zwróć uwagę na to, że do wykresu każdej z tych funkcji należy punkt (0, 0).

Wykresy funkcji z punktu a) przedstawia rysunek.



Zauważ, że wykresy funkcji kwadratowych z punktu b) możemy otrzymać, przekształcając wykresy funkcji z punktu a) przez symetrię osiową względem osi OX. Poniższy rysunek przedstawia wykresy funkcji kwadratowych:

$y=-2x^2 \qquad y=-x^2 \qquad y=-\frac{1}{2}x^2 \qquad y=-\frac{1}{4}x^2$



Na podstawie wykresów funkcji w powyższym przykładzie omówimy własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$.

- Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ jest parabola. Parabola jest figurą osiowosymetryczną. Osią symetrii jest w tym przypadku prosta o równaniu $x = 0$. Oś symetrii paraboli przecina parabolę w punkcie, który nazywamy **wierzchołkiem paraboli**. Wierzchołek W paraboli będącej wykresem funkcji $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ ma współrzędne (0, 0).

Wierzchołek dzieli parabolę na dwie części, które nazywamy **ramionami paraboli**. Zwróć uwagę na to, że jeśli $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są do góry; natomiast jeśli $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są do dołu.

- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$.
- Funkcja ma jedno miejsce zerowe: 0.
- Funkcja nie jest różnowartościowa.

Pozostałe własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$ zależą od znaku współczynnika a.

Jeśli $a > 0$, to:

- zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 0, +\infty)$
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów różnych od zera, tzn.: $y > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych
- funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$
- funkcja nie przyjmuje wartości największej; dla argumentu 0 przyjmuje wartość najmniejszą, równą 0.

Jeśli $a < 0$, to:

- zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty, 0\rangle$
- funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów różnych od zera, tzn.: $y < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; funkcja nie przyjmuje wartości dodatnich
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$
- funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej; dla argumentu 0 przyjmuje wartość największą, równą 0.

Przykład 2.

Napiszemy wzór funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje 25% kwadratu tej liczby. Następnie obliczymy wartość tej funkcji dla argumentu $1 + \sqrt{3}$.

Ponieważ

25% kwadratu liczby rzeczywistej x

można przedstawić jako

$$\frac{1}{4}x^2,$$

więc szukaną funkcję opisuje wzór

$$y = \frac{1}{4}x^2, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R}.$$

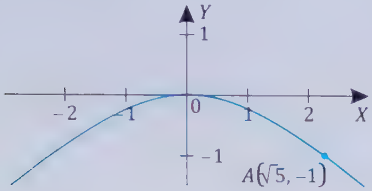
Obliczamy wartość tej funkcji dla argumentu $1 + \sqrt{3}$.

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + 2\sqrt{3} + 3\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dla argumentu $1 + \sqrt{3}$ wartość funkcji jest równa $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 3.

Rysunek przedstawia wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2$. Napiszemy wzór tej funkcji, korzystając z danych na rysunku.



Wystarczy obliczyć wartość współczynnika a.

Do wykresu funkcji należy punkt $A\left(\sqrt{5},-1\right)$. Zatem

$$-1 = a\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$a = -\frac{1}{5}$$

Wzór funkcji jest następujący: $y = -\frac{1}{5}x^2$.

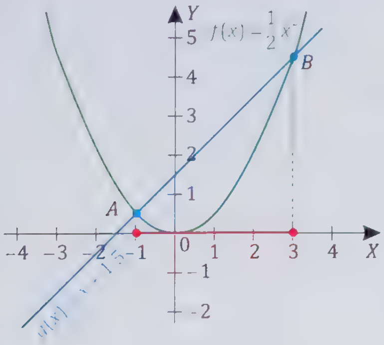
Przykład 4.

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Na podstawie jej wykresu wyznaczymy zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant x + 1{,}5$.

We wspólnym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ oraz } g(x) = x + 1{,}5$$

Odczytujemy z rysunku, dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie większe niż wartości funkcji g.



Wykresy funkcji f oraz g przecinają się w punktach $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ oraz $B\left(3, 4\frac{1}{2}\right)$.

(Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia).

Funkcja f przyjmuje wartości nie większe niż funkcja g dla argumentów x z przedziału $\langle -1, 3\rangle$.

Zatem nierówność $f(x) \leqslant x + 1{,}5$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $\langle -1, 3\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji kwadratowych i omów ich własności:
   a) $y = 3x^2$
   b) $y = -\frac{1}{3}x^2$
2. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -\sqrt{2}x^2$. Oblicz wartości tej funkcji dla argumentów:
   a) -1; $2{,}5$; 19
   b) $\sqrt[4]{2}$; $-3\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$

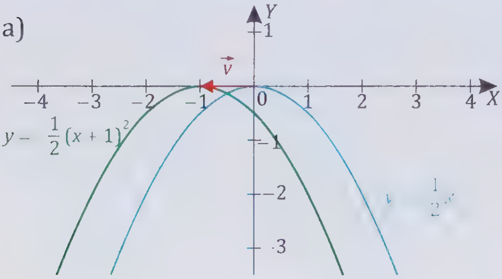
Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

W pierwszej klasie dowiedziałeś się, że w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [p, q]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$. Korzystając z tej informacji, napiszemy wzór funkcji, której wykres powstanie w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = -\frac{1}{2}x^2$ o dany wektor $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{v} = [-1, 0]$, b) $\vec{v} = [0, 3]$, c) $\vec{v} = [-1, 3]$.

Zilustrujmy te przekształcenia rysunkami.

a)



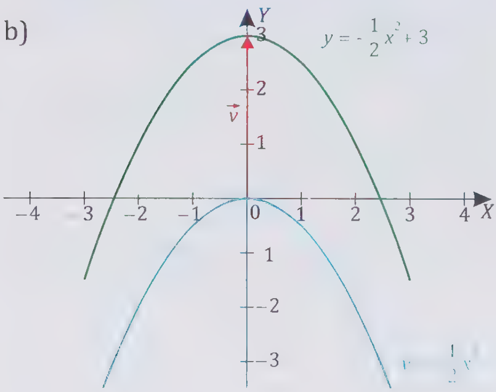
W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ o wektor } \vec{v} = [-1, 0]$$

otrzymujemy wykres funkcji

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2.$$

b)



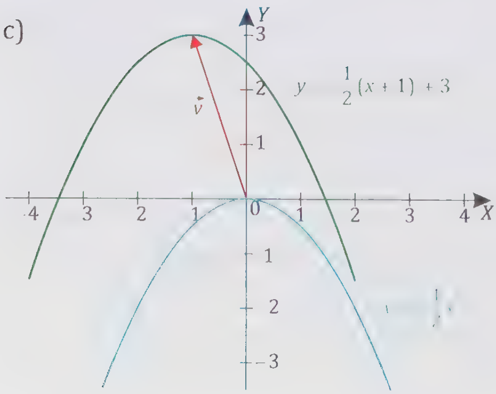
W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ o wektor } \vec{v} = [0, 3]$$

otrzymujemy wykres funkcji

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3.$$

c)



W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ o wektor } \vec{v} = [-1, 3]$$

otrzymujemy wykres funkcji

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3.$$

Twierdzenie 1.
W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, o wektor $\vec{v} = [p, q]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = a(x - p)^2 + q$.

Wzór $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej**.

W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2$ ($a \neq 0$) o wektor $\vec{v} = [p, q]$ otrzymamy wykres, który ma taki sam kształt, jak wykres przed przesunięciem. Zatem nowy wykres też jest parabolą. Ponadto, współrzędne wierzchołka tej paraboli możemy wyznaczyć, dodając odpowiednie współrzędne wektora do współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $y = ax^2$.

$x_w = 0 + p = p \qquad y_w = 0 + q = q$

Wniosek: Wykresem funkcji kwadratowej $y = a(x - p)^2 + q$ ($a \neq 0$) jest parabola. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W(p, q)$. Jeśli $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są do dołu, jeśli $a > 0$, to ramiona paraboli są skierowane do góry.

Przykład 1.

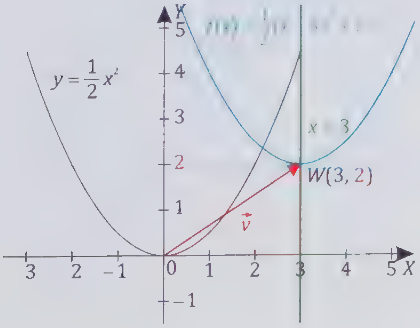
Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej:

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$ b) $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$

Następnie na podstawie wykresu funkcji podamy:
- zbiór wartości tej funkcji
- równanie osi symetrii wykresu funkcji
- maksymalne przedziały monotoniczności funkcji.

Ad a) Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{2}x^2$ o wektor $\vec{v} = [3, 2]$.

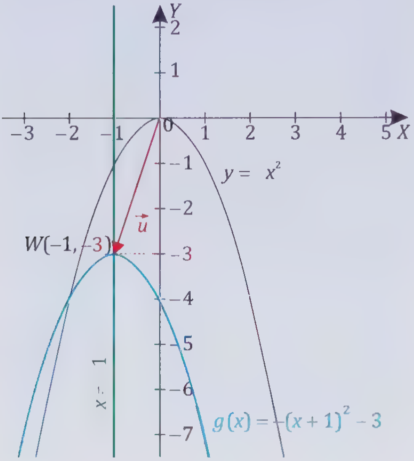
Wierzchołkiem szukanej paraboli jest punkt $W(3, 2)$. Parabola zwrócona jest ramionami do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni).



- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 2, +\infty)$.
- Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = 3$.
- Funkcja jest
  malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$,
  rosnąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$.

Ad b)

Wykres funkcji kwadratowej $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = -x^2$ o wektor $\vec{u} = [-1, -3]$. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $W(-1, -3)$. Parabola zwrócona jest ramionami do dołu (współczynnik przy x^2 jest ujemny).



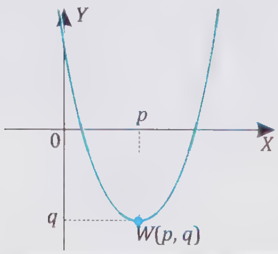
- Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-\infty, -3\rangle$.
- Osią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = -1$.
- Funkcja g jest
  rosnąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$,
  malejąca w przedziale $\langle -1, +\infty)$.

Podsumujmy nasze rozważania.

Na podstawie wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, potrafimy omówić wiele własności tej funkcji.

- Wykres funkcji $y = a(x - p)^2 + q$ możemy otrzymać, przesuwając równolegle wykres funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [p, q]$.
- Wykresem funkcji jest parabola o wierzchołku w punkcie $W(p, q)$.
- Osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x = p$.

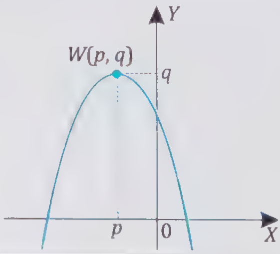
Jeśli $a > 0$, to parabola zwrócona jest ramionami do góry,



wówczas:

- funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, p\rangle$, a rosnąca w przedziale $\langle p, +\infty)$
- $ZW = \langle q, +\infty)$
- dla argumentu p funkcja przyjmuje najmniejszą wartość równą q.

Jeśli $a < 0$, to parabola zwrócona jest ramionami do dołu,



wówczas:

- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, p\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle p, +\infty)$
- $ZW = (-\infty, q\rangle$
- dla argumentu p funkcja przyjmuje największą wartość równą q.

Przykład 2.

Napiszemy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że największą wartość równą 4 funkcja osiąga dla argumentu –3, a do wykresu tej funkcji należy punkt $A(1, -6)$.

Wiadomo, że funkcja kwadratowa osiąga wartość największą, zatem parabola skierowana jest ramionami do dołu. Ponadto wierzchołkiem paraboli jest punkt:

$W(-3, 4)$, czyli $p = -3$ i $q = 4$.

Zatem wzór funkcji można zapisać w postaci

$y = a(x + 3)^2 + 4$, gdzie $a < 0$.

Teraz wystarczy obliczyć wartość współczynnika a. Skorzystamy z faktu, że punkt $A(1, -6)$ należy do paraboli. Mamy zatem

$$-6 = a(1 + 3)^2 + 4$$
$$-10 = 16a$$
$$a = -\frac{5}{8} \quad \left(\text{oczywiście } -\frac{5}{8} < 0\right)$$

Wzór funkcji jest następujący: $y = -\frac{5}{8}(x + 3)^2 + 4$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz wzór funkcji, której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji kwadratowej $y = 6x^2$ o wektor $\vec{v}$, jeśli:
   a) $\vec{v} = [0, 2]$ b) $\vec{v} = [-4, 0]$ c) $\vec{v} = [5, -4]$ d) $\vec{v} = [-10, 100]$
2. Funkcja kwadratowa f jest opisana wzorem $f(x) = -2(x + 5)^2 - 3$. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie odczytaj z wykresu:
   a) zbiór wartości funkcji f
   b) wartość funkcji dla argumentu –5 oraz wartość funkcji dla argumentu –4.
3. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = \frac{1}{2}(x - 10)^2 + 12$. Podaj:
   a) współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji
   b) równanie osi symetrii wykresu funkcji
   c) maksymalne przedziały monotoniczności funkcji
   d) jaką wartość: największą czy najmniejszą, funkcja przyjmuje dla argumentu 10 i ile ta wartość wynosi.
4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W(-1, 3)$ i do wykresu tej funkcji należy również punkt $A(-6, 13)$.
5. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, jeśli największą wartością tej funkcji jest liczba 0, osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu $x = 5$ i parabola będąca wykresem tej funkcji przecina oś OY w punkcie $A(0, -100)$.

Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

Poznałeś już wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

oraz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

$$y = a(x - p)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

Powstaje pytanie, jaka jest zależność między tymi wzorami. Aby odpowiedzieć na nie, spróbujmy najpierw wykonać działania zapisane we wzorze funkcji w postaci kanonicznej w następującym przykładzie.

Przykład 1.

Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = 2(x - 1)^2 + 5$. Wykonamy działania zapisane we wzorze funkcji:

$$y = 2\left(x^2 - 2x + 1\right) + 5$$

$$y = 2x^2 - 4x + 7$$

Otrzymaliśmy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

Wykonując działania zapisane we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, otrzymujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej. W kolejnym przykładzie pokażemy, jak można wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej doprowadzić do postaci kanonicznej.

Przykład 2.

Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = 2x^2 - 12x + 19$. Przekształcimy go do postaci kanonicznej w następujący sposób:

- Grupujemy wyrazy zawierające zmienną x i wyłączamy poza nawias współczynnik przy x^2:

  $$y = 2\left(x^2 - 6x\right) + 19$$

- Ponieważ $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, więc wyrażenie $x^2 - 6x$ jest równe $(x - 3)^2 - 9$, stąd

  $$y = 2\left[(x - 3)^2 - 9\right] + 19$$

- Po zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania otrzymujemy:

  $$y = 2(x - 3)^2 + 1$$

Sprowadziliśmy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = 2x^2 - 12x + 19$ do postaci kanonicznej $y = 2(x - 3)^2 + 1$.

Okazuje się, że istnieje związek między współczynnikami a, b, c we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a liczbami p i q we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Prawdziwe jest twierdzenie 1.

Twierdzenie 1.
Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, można przekształcić do postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$. Wówczas

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}.$$

Dowód:
Przeprowadzamy rozumowanie analogiczne do rozważań z przykładu 2.

Grupujemy wyrazy ze zmienną x, następnie wyłączamy współczynnik a poza nawias $(a \neq 0)$	$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$
Zauważamy, że wyrażenie $x^2 + \frac{b}{a}x$ można zastąpić wyrażeniem $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ (sprawdź!)	$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$
Stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$
Wyraz c zapisujemy w postaci $\frac{4ac}{4a}$, następnie z dwóch ostatnich wyrazów wyłączamy -1 przed nawias	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$ $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a}\right)$
Wykonujemy odejmowanie ułamków w drugim nawiasie	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

Teraz wystarczy porównać wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

$y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$

z otrzymanym wzorem. Otrzymujemy:

$$p = \frac{-b}{2a} \qquad q = \frac{-(b^2-4ac)}{4a},$$

co kończy dowód.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że każdy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej można doprowadzić do postaci kanonicznej. Wiemy również, że jeśli wykonamy wskazane działania we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, to doprowadzimy ten wzór do postaci ogólnej.

Liczba $b^2 - 4ac$ jest szczególna dla danej funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ i nazywamy ją **wyróżnikiem**. Wyróżnik oznaczamy grecką literą Δ (delta):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

<u>Wniosek:</u>

- Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ można przedstawić w postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$, przy czym $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ można otrzymać w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{u} = \left[\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right]$

Z poprzedniego wniosku wynika kolejny.

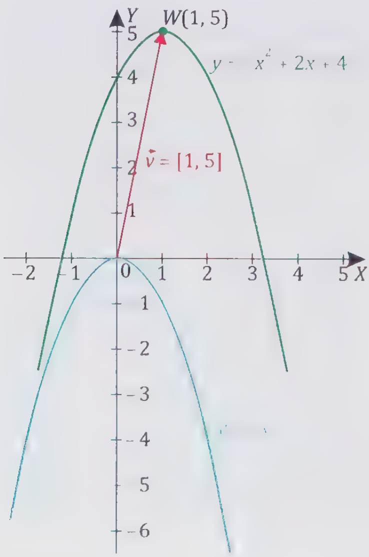
<u>Wniosek:</u> Wierzchołek W paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ma współrzędne (x_w, y_w), gdzie:

$$x_w = \frac{-b}{2a} \qquad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

Wykorzystajmy poznane informacje w następujących przykładach.

Przykład 3.

Dana jest funkcja kwadratowa $y = -x^2 + 2x + 4$. Obliczymy współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem danej funkcji. Następnie zapiszemy wzór funkcji w postaci kanonicznej i sporządzimy wykres tej funkcji.



- Ze wzoru ogólnego funkcji odczytujemy współczynniki:

  $a = -1 \quad b = 2 \quad c = 4$

  i obliczamy wartość wyróżnika:

  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 4 + 16 = 20$
- Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

  $x_w = \frac{-b}{2a}$, więc $x_w = \frac{-2}{-2} = 1$

  $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$, więc $y_w = \frac{-20}{-4} = 5$

  stąd $W(1, 5)$.
- Zapisujemy wzór funkcji w postaci kanonicznej:

  $y = -(x-1)^2 + 5.$

  Wykres funkcji powstanie w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji kwadratowej $y = -x^2$ o wektor $\vec{v} = [1, 5]$.

Przykład 4.

Rozważmy funkcję kwadratową $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Wiedząc, że do wykresu tej funkcji należą punkty $A(0, -6)$ oraz $B(-1, 0)$, obliczymy wartości współczynników b i c. Następnie wyznaczymy zbiór wartości funkcji f bez rysowania wykresu.

Punkt $A(0, -6)$ należy do wykresu funkcji f, więc $f(0) = -6$. Obliczamy wartość funkcji dla argumentu 0:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$$

Ponieważ $f(0) = -6$, więc $c = -6$.
Podobnie punkt $B(-1, 0)$ należy do wykresu funkcji f, zatem $f(-1) = 0$. Otrzymujemy:

$$0 = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 6 \qquad b = 2 - 6, \text{ stąd } \quad b = -4$$

Współczynniki są równe: $b = -4$, $c = -6$. Funkcję f opisuje wzór $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$. Zauważ, że parabola będąca wykresem funkcji f ma ramiona skierowane do góry (dlaczego?). Zatem funkcja nie przyjmuje wartości największej. Wartość najmniejszą funkcji wyznaczymy, obliczając drugą współrzędną wierzchołka paraboli ze wzoru $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$. Mamy więc:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 64 \qquad y_w = \frac{-64}{4 \cdot 2} = -8, \quad \text{więc} \quad ZW = \langle -8, +\infty)$$

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -8, +\infty)$.

W przykładzie 4. obliczyliśmy wartość funkcji kwadratowej f dla argumentu 0 i otrzymaliśmy $f(0) = c$. Wykonując podobne obliczenia dla funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, otrzymujemy kolejny wniosek.

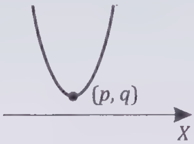
Wniosek: Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ przecina oś OY w punkcie $(0, c)$.

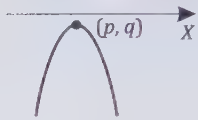
Sprawdź, czy rozumiesz

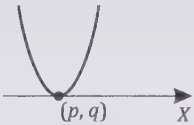
1. Napisz wzór funkcji kwadratowej $y = -x^2 - 8x - 11$ w postaci kanonicznej i naszkicuj wykres tej funkcji w układzie współrzędnych.
2. Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, jeśli wyróżnik dla tej funkcji jest równy 100, a wierzchołkiem paraboli jest punkt $W\left(-1\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}\right)$.
3. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f oraz wyznacz punkt przecięcia tego wykresu z osią OY, jeśli:
   a) $f(x) = x^2 - 12x + 21$ b) $f(x) = x^2 - 17$ c) $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x - 1$.
4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, wiedząc, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty, 4\rangle$, a dla argumentów 0 oraz 6 funkcja przyjmuje wartość -5.

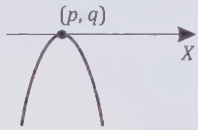
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

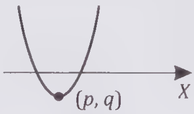
Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest równa liczbie punktów wspólnych wykresu tej funkcji i osi OX. Rozważmy różne położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX w dwóch sytuacjach: jeśli $a > 0$ (parabola zwrócona jest ramionami do góry) oraz jeśli $a < 0$ (parabola zwrócona jest ramionami do dołu).

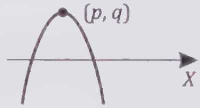
<table>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>1) funkcja nie ma miejsc zerowych


$a > 0$ i $q > 0$, zatem $a \cdot q > 0$</td><td>1) funkcja nie ma miejsc zerowych


$a < 0$ i $q < 0$, zatem $a \cdot q > 0$</td></tr>
<tr><td>2) funkcja ma jedno miejsce zerowe


$a > 0$ i $q = 0$, zatem $a \cdot q = 0$</td><td>2) funkcja ma jedno miejsce zerowe


$a < 0$ i $q = 0$, zatem $a \cdot q = 0$</td></tr>
<tr><td>3) funkcja ma dwa różne miejsca zerowe


$a > 0$ i $q < 0$, zatem $a \cdot q < 0$</td><td>3) funkcja ma dwa różne miejsca zerowe


$a < 0$ i $q > 0$, zatem $a \cdot q < 0$</td></tr>
</table>

Zauważyłeś zapewne, że liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej zależy od znaku iloczynu $a \cdot q$. Ponadto, druga współrzędna wierzchołka paraboli wyraża się wzorem $q = \frac{-\Delta}{4a}$, zatem $\Delta = -4aq$. Znak wyróżnika Δ zależy od znaku iloczynu $a \cdot q$.

Mamy więc:

- $a \cdot q > 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$
- $a \cdot q = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$
- $a \cdot q < 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$

Nasze spostrzeżenia prowadzą do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.

Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac$:
- nie ma miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma tylko jedno miejsce zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$,
- ma dwa miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Przykład 1.

Dane są funkcje kwadratowe:

a) $f(x) = -3x^2 + 2x - 8$ b) $g(x) = 0{,}5x^2 - 4x$ c) $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2\frac{1}{4}$.

Zbadajmy liczbę miejsc zerowych każdej z nich.
W tym celu obliczamy wyróżnik dla każdej z podanych funkcji:
Ad a) Obliczamy wyróżnik dla funkcji f:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = -92 \quad (-92 < 0)$$

Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
Ad b) Obliczamy wyróżnik dla funkcji g:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0 = 16 \quad (16 > 0)$$

Funkcja g ma dwa różne miejsca zerowe.
Ad c) Dla funkcji h otrzymujemy:

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{4} = 0$$

Funkcja h ma tylko jedno miejsce zerowe.

Wyznaczmy teraz wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, w zależności od współczynników a, b i c. W tym celu przedstawimy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynu dwóch wyrażeń algebraicznych, zawierających zmienną x. Wykorzystamy do tego celu postać kanoniczną wzoru funkcji

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

- Rozpatrzmy przypadek, gdy $\Delta = 0$.
  Wówczas wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej jest następujący:

  $$(*) \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

  Stąd łatwo wyznaczymy miejsce zerowe:

  $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \quad \text{i} \quad a \neq 0$$

  $$x + \frac{b}{2a} = 0$$

  $$x = \frac{-b}{2a}, \text{ czyli miejscem zerowym jest liczba } \frac{-b}{2a}.$$

- Rozpatrzmy przypadek, gdy $\Delta > 0$.
  Po wyłączeniu współczynnika a przed nawias mamy:
  $$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
  Wyrażenie $\frac{\Delta}{4a^2}$ możemy zapisać tak: $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ (bo $\Delta > 0$).
  Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i otrzymujemy:
  $$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
  Ostatecznie mamy:
  (**) $y = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$, gdzie $a \neq 0$.
  Przyrównujemy prawą stronę wzoru funkcji do zera i obliczamy miejsca zerowe:
  $$a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \quad \text{i} \quad a \neq 0$$
  $$x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$
  $$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$
  czyli miejscami zerowymi są liczby
  $$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- W przypadku, gdy $\Delta < 0$, funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Udowodniliśmy twierdzenie 2.

Twierdzenie 2.

Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac$:
- ma tylko jedno miejsce zerowe, $x_0 = \frac{-b}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$
- ma dwa miejsca zerowe, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$
- nie ma miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$.

UWAGA: Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych [zobacz (*) i (**)].

Wzór $y=a(x-x_0)^2$ (jeśli $\Delta=0$) oraz wzór $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ (jeśli $\Delta>0$) nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej**.

Wniosek: Jeśli funkcja kwadratowa $y=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$, ma miejsca zerowe, to jej wzór można przedstawić w postaci iloczynowej:

- $y=a(x-x_0)^2$, jeśli funkcja ma tylko jedno miejsce zerowe
- $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, jeśli funkcja ma dwa różne miejsca zerowe.

Jeśli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to jej wzoru nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

Przykład 2.

Dane są wzory funkcji kwadratowych f, g, h:

a) $f(x)=2x^2+6x+9$ b) $g(x)=x^2+4x+4$ c) $h(x)=\frac{1}{2}x^2+x-4$

Sprawdzimy, które spośród nich można przedstawić w postaci iloczynowej. Następnie wyznaczymy tę postać (o ile istnieje).

W tym celu obliczamy wyróżnik dla każdej funkcji i miejsca zerowe (o ile istnieją).

Ad a) Dla funkcji f otrzymujemy:

$$\Delta=-36, \quad -36<0.$$

Zatem funkcja f nie ma miejsc zerowych. Jej wzoru nie można zapisać w postaci iloczynowej.

Ad b) Dla funkcji g otrzymujemy:

$$\Delta=0$$

Funkcja g ma jedno miejsce zerowe. Obliczamy:

$$x_0=\frac{-4}{2\cdot 1}=-2$$

Wzór funkcji g przedstawiamy w postaci iloczynowej:

$$g(x)=(x+2)^2$$

Ad c) Dla funkcji h otrzymujemy:

$$\Delta=9, \quad 9>0$$

Funkcja h ma dwa miejsca zerowe. Obliczamy:

$$\sqrt{\Delta}=3$$

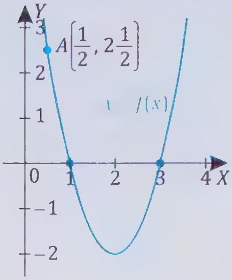
$$x_1=\frac{-1-3}{2\cdot\frac{1}{2}}=-4 \qquad x_2=\frac{-1+3}{2\cdot\frac{1}{2}}=2$$

Wzór funkcji h zapisujemy w postaci iloczynowej:

$$h(x)=\frac{1}{2}(x+4)(x-2).$$

Przykład 3.

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Korzystając z danych na rysunku, napiszemy wzór tej funkcji w postaci ogólnej.



Z wykresu odczytujemy dwa miejsca zerowe funkcji f:

1 oraz 3.

Ponadto, do wykresu funkcji f należy punkt

$A\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$.

Wygodnie jest zapisać wzór funkcji f w postaci iloczynowej – wówczas we wzorze pozostaje do obliczenia tylko jeden współczynnik a.

$f(x) = a(x-1)(x-3)$, gdzie $a > 0$.

Do wykresu funkcji należy punkt $A\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$, zatem

$2\frac{1}{2} = a\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)$, stąd

$a = 2$

Wzór funkcji f ma postać:

$f(x) = 2(x-1)(x-3)$

Po wykonaniu działań zapisanych we wzorze funkcji f otrzymujemy wzór funkcji w postaci ogólnej:

$2(x-1)(x-3) = 2(x^2-3x-x+3) = 2x^2-8x+6$, czyli

$f(x) = 2x^2-8x+6$

Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej jest następujący: $f(x) = 2x^2-8x+6$.

Przykład 4.

Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej $f(x) = \;\; 2(x-3)^2+8$. Przedstawimy wzór tej funkcji w postaci iloczynowej i wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f.

Najpierw sprawdzimy, czy postać iloczynowa istnieje. Ze wzoru funkcji odczytujemy:

$a = -2$ oraz $q = 8$, zatem

$a \cdot q < 0$, czyli

$\Delta > 0$ (funkcja ma dwa różne miejsca zerowe).

Zadanie możemy wykonać na dwa sposoby:

I sposób – doprowadzamy wzór funkcji do postaci iloczynowej i na jego podstawie podajemy miejsca zerowe funkcji f.

Wyłączamy ze wzoru funkcji $f(x) = -2(x-3)^2 + 8$ współczynnik (-2) poza nawias i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$f(x) = -2\left[(x-3)^2 - 4\right]$$
$$f(x) = -2\left[(x-3)^2 - 2^2\right]$$
$$f(x) = -2(x-3-2)(x-3+2)$$
$$f(x) = -2(x-5)(x-1)$$

Ze wzoru odczytujemy miejsca zerowe funkcji f; są to liczby 1 oraz 5.

II sposób – obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej ze wzoru funkcji w postaci ogólnej; następnie zapisujemy postać iloczynową wzoru funkcji f.

Sprowadzamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$$f(x) = -2\left(x^2 - 6x + 9\right) + 8$$
$$f(x) = -2x^2 + 12x - 10$$

Obliczamy wartość wyróżnika: $\Delta = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8$

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji f:

$$x_1 = \frac{-12-8}{2\cdot(-2)} = 5 \qquad x_2 = \frac{-12+8}{2\cdot(-2)} = 1$$

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej:

$$f(x) = -2(x-5)(x-1)$$

Wzór funkcji f w postaci iloczynowej jest następujący: $f(x) = -2(x-5)(x-1)$.
Funkcja ma dwa miejsca zerowe: 1 oraz 5.

Na podstawie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej możemy podać niektóre własności tej funkcji. Omówimy je w poniższym przykładzie.

Przykład 5.

Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)$.

a) Odczytamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej.
b) Obliczymy współrzędne wierzchołka paraboli.
c) Na podstawie wyznaczonych wielkości i wartości współczynnika przy x^2 omówimy niektóre własności funkcji f.

Ad a) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: -1 i 3.

Ad b) Wyznaczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka W paraboli, korzystając z tego, że wykres funkcji kwadratowej jest osiowosymetryczny. Odciętą wierzchołka paraboli x_w odczytamy w połowie odcinka zawartego w osi OX, którego końcami są punkty przecięcia wykresu funkcji f z osią OX.
Zatem x_w jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych funkcji f.

$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ skąd } x_w = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Rzędną y_w wierzchołka paraboli obliczymy jako wartość funkcji f dla argumentu x_w. Otrzymujemy:

$$y_w = f(1) = -\frac{1}{4}(1+1)(1-3) = 1$$

Wierzchołek W paraboli ma współrzędne $(1, 1)$.

Ad c) Mamy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej. Współczynnik przy x^2 jest równy $-\frac{1}{4}$, więc jest ujemny. Wierzchołek $W(1, 1)$ paraboli będącej wykresem omawianej funkcji znajduje się nad osią OX, ramiona paraboli są skierowane do dołu i przechodzą przez punkty $(-1, 0)$ i $(3, 0)$. Zatem:

- $D = \mathbf{R}$
- $ZW = (-\infty, 1\rangle$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 3)$
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$, zaś malejąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$
- funkcja przyjmuje największą wartość równą 1 dla argumentu 1; nie przyjmuje natomiast wartości najmniejszej.

Przykład 6.

Wykażemy, że dla dowolnych wartości parametrów m i n funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + (m - 3n)x - 3mn$ ma miejsca zerowe. Wiedząc dodatkowo, że funkcja f ma jedno miejsce zerowe i $f(n) = 4$, wyznaczymy wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

Założenie: $f(x) = x^2 + (m - 3n)x - 3mn$, $x \in \mathbf{R}$

Teza: dla dowolnych liczb rzeczywistych m i n funkcja f ma miejsca zerowe

Dowód:

Aby udowodnić, że funkcja f ma miejsca zerowe, wystarczy pokazać, że $\Delta \geqslant 0$. Obliczamy:

$$\Delta = (m-3n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3mn) = m^2 - 6mn + 9n^2 + 12mn = m^2 + 6mn + 9n^2 = (m+3n)^2$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych m i n wyrażenie $(m + 3n)^2$ jest nieujemne, więc $\Delta \geqslant 0$, co kończy dowód.

Funkcja f ma jedno miejsce zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$. Zatem:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+3n)^2 = 0 \Leftrightarrow m+3n = 0 \Leftrightarrow m = -3n$

Jeśli $m = -3n$, to wzór funkcji f możemy zapisać następująco:

$f(x) = x^2 + (m-3n)x - 3mn = x^2 + (-3n-3n)x - 3\cdot(-3n)\cdot n = x^2 - 6nx + 9n^2$

Ponadto wiemy, że $f(n) = 4$. Stąd:

$f(n) = n^2 - 6n\cdot n + 9n^2 = n^2 - 6n^2 + 9n^2 = 4n^2$ i $f(n) = 4$, czyli

$4n^2 = 4$, zatem

$n^2 = 1$, skąd $n = -1 \lor n = 1$.

Jeśli $n = -1$, wówczas $f(x) = x^2 + 6x + 9$. Wzór funkcji f w postaci iloczynowej: $f(x) = (x+3)\cdot(x+3)$.

Jeśli $n = 1$, wówczas $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Wzór funkcji f w postaci iloczynowej: $f(x) = (x-3)\cdot(x-3)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f oraz napisz wzór funkcji f w postaci iloczynowej, jeśli:
   a) $f(x) = -3x^2 - 3x + 6$ b) $f(x) = x^2 - 8x - 9$ c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 12$
2. Funkcja kwadratowa jest opisana za pomocą wzoru w postaci kanonicznej. Na jego podstawie oceń, czy funkcja ma miejsca zerowe. Jeśli tak, zapisz wzór w postaci iloczynowej, bez wyznaczania wzoru w postaci ogólnej:
   a) $y = 4x^2 - 1$ b) $y = -2(x-7)^2 - 2$ c) $y = -3(x-1)^2 + 12$
3. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby: -8 oraz 3. Do wykresu funkcji f należy punkt $A(-4, -14)$. Napisz wzór funkcji f w postaci iloczynowej, ogólnej i kanonicznej.
4. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ w postaci kanonicznej oraz w postaci iloczynowej. Porównaj te wzory. Podaj miejsce zerowe funkcji f i współrzędne wierzchołka paraboli. Co zauważyłeś?
5. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej $f(x) = -(x-2)(x+2)$ w postaci ogólnej i postaci kanonicznej. Porównaj te wzory. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli i wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY. Co zauważyłeś?
6. Wykaż, że dla dowolnych wartości parametrów $a \in \mathbf{R}$ i $b \in \mathbf{R} - \{0\}$ funkcja kwadratowa $f(x) = bx^2 + (a-b)x - a$ ma miejsca zerowe. Udowodnij, że funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe wtedy, gdy liczby a i b są przeciwne.

Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu

Już wiesz, że wykresem każdej funkcji kwadratowej jest parabola. Do tej pory szkicowaliśmy wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ na podstawie wzoru tej funkcji w postaci kanonicznej, posługując się wykresem funkcji $y = ax^2$. Teraz, kiedy oprócz współrzędnych wierzchołka paraboli potrafimy obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej i punkt przecięcia wykresu z osią OY, możemy sporządzić wykres tej funkcji bez korzystania z przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = ax^2$.

Aby naszkicować wykres funkcji kwadratowej opisanej wzorem w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, możemy postąpić w następujący sposób:

- Podajemy współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY: $(0, c)$.
- Wyznaczamy współrzędne wierzchołka W paraboli: $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.
- Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją).
- Zaznaczamy w układzie współrzędnych wyznaczone punkty i sprawdzamy, czy ich wzajemne położenie jest zgodne ze znakiem współczynnika przy x^2.
- Przez zaznaczone punkty prowadzimy linię tak, by otrzymać parabolę.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $y = 2x^2 + 4x - 6$. Następnie na podstawie wykresu omówimy jej własności.

Wzór opisuje funkcję kwadratową, więc jej wykresem jest parabola. Obliczamy

- współrzędne punktu przecięcia z osią OY $(0, -6)$
- $W(x_w, y_w)$

  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 64$

  $x_w = \dfrac{-4}{2 \cdot 2} = -1 \qquad y_w = \dfrac{-64}{4 \cdot 2} = -8$

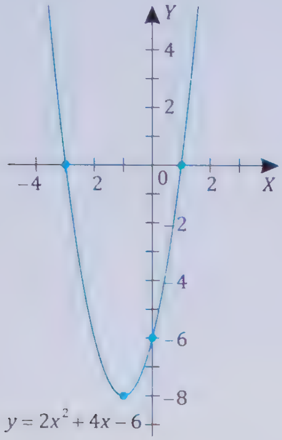
  $W(-1, -8)$
- miejsca zerowe $(\Delta > 0)$

  $\Delta = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8$

  $x_1 = \dfrac{-4-8}{2 \cdot 2} = -3 \qquad x_2 = \dfrac{-4+8}{2 \cdot 2} = 1$

  Miejsca zerowe: -3 oraz 1.

Zaznaczamy odpowiednie punkty w układzie współrzędnych i szkicujemy wykres:



Własności funkcji:

– $D = \mathbf{R}$
– $ZW = \langle -8, +\infty)$
– $y = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 1)$
  $y > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
  $y < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$
– funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -1, +\infty)$,
  funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$
– dla argumentu -1 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, równą -8,
  funkcja nie osiąga wartości największej

Czasami wygodnie jest obliczyć jeszcze inne wartości funkcji, dla wybranych przez siebie argumentów, żeby otrzymać bardziej dokładny wykres. Ma to znaczenie szczególnie wówczas, gdy funkcja nie ma miejsc zerowych.

Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$ i na podstawie wykresu funkcji omówimy jej własności.

Wyznaczamy współrzędne punktów należących do paraboli będącej wykresem danej funkcji:

- $(0, -5)$
- $\Delta = 3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-5) = -1$

$$x_W = \frac{-3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 \qquad y_W = \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$W\left(3, -\frac{1}{2}\right)$$

- zauważamy, że $\Delta < 0$, więc funkcja nie ma miejsc zerowych,
- wybieramy kilka argumentów, dla których obliczamy wartości funkcji na podstawie jej wzoru.
  Zauważ, że warto szukać punktów położonych parami symetrycznie względem osi symetrii paraboli, czyli w tym wypadku względem prostej o równaniu $x = 3$.
  Ponadto można wybrać takie argumenty, które znajdują się na osi OX stosunkowo niedaleko od pierwszej współrzędnej wierzchołka, czyli na przykład w odległości 1 lub 2 od x_W.

W tym wypadku są to liczby: 2 i 4 oraz 1 i 5.

$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = -1$

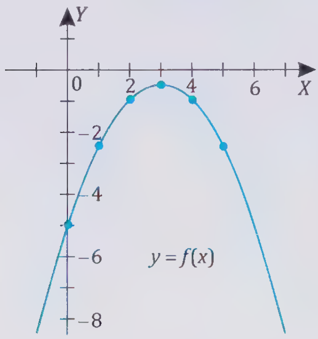
$f(4) = f(2) = -1$

$f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = -2\frac{1}{2}$

$f(5) = f(1) = -2\frac{1}{2}$

Punkty o współrzędnych $(2, -1)$, $(4, -1)$, $\left(1, -2\frac{1}{2}\right)$, $\left(5, -2\frac{1}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji f.

Zaznaczamy odpowiednie punkty w układzie współrzędnych i szkicujemy wykres:



Własności funkcji:

- $D_f = \mathbf{R}$
- $ZW_f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$,
  funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$
- dla argumentu 3 funkcja przyjmuje wartość największą, równą $-\frac{1}{2}$,
  funkcja nie osiąga wartości najmniejszej

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$ i $x + y = 3$, to $x^3 + y^3 \geqslant 6{,}75$.

Założenie: $x + y = 3$, gdzie $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$

Teza: $x^3 + y^3 \geqslant 6{,}75$

Dowód:
Ze wzoru na sumę sześcianów otrzymujemy:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Z założenia wiemy, że $x + y = 3$, więc $y = 3 - x$. Stąd mamy:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3 \cdot [x^2 - x \cdot (3 - x) + (3 - x)^2] =$$
$$= 3 \cdot (x^2 - 3x + x^2 + 9 - 6x + x^2) = 3 \cdot (3x^2 - 9x + 9) = 9 \cdot (x^2 - 3x + 3)$$

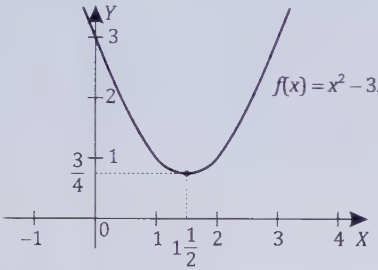
Teraz wystarczy oszacować wartość wyrażenia $x^2 - 3x + 3$. W tym celu posłużymy się wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 3x + 3$.

Wykresem funkcji f jest parabola ramionami zwrócona do góry. Funkcja f nie ma miejsc zerowych, bo $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$, $-3 < 0$. Wierzchołek paraboli ma współrzędne (x_w, y_w), gdzie:

$$x_w = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_w = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 3 = \frac{3}{4}$$

Wykres funkcji f ma z osią OY punkt wspólny $(0, 3)$. Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x) = x^2 - 3x + 3$.



Zbiorem wartości funkcji f jest $\left\langle \frac{3}{4}, +\infty \right)$, zatem

$$\bigwedge_{x \in R} x^2 - 3x + 3 \geqslant 0{,}75$$

Stąd mamy:

$$x^3 + y^3 = 9 \cdot (x^2 - 3x + 3) \geqslant 9 \cdot 0{,}75 = 6{,}75,$$

czyli

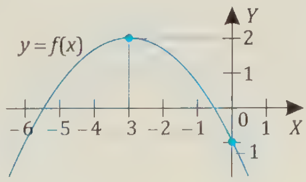
$$x^3 + y^3 \geqslant 6{,}75,$$ co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f i na podstawie wykresu omów jej własności, jeśli:
   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ b) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$ c) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

2. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji kwadratowych $f(x) = x^2 - 5x + 6$ oraz $g(x) = x^2 + 5x + 6$.
   a) Porównaj wykresy tych funkcji. Co zauważyłeś?
   b) Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \geqslant g(x)$.

3. Na rysunku obok znajduje się fragment wykresu funkcji kwadratowej f. Wykorzystując dane z rysunku, wyznacz wzór ogólny funkcji f.



4. Wykaż, że jeśli $x - y = 4$, to $x^3 - y^3 \geqslant 16$.

Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, określona w zbiorze liczb rzeczywistych:

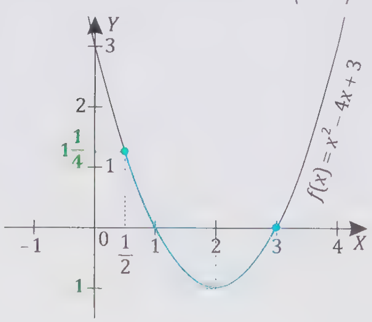
- przyjmuje największą wartość równą y_w, jeśli $a < 0$; wówczas nie ma wartości najmniejszej;
- przyjmuje najmniejszą wartość równą y_w, jeśli $a > 0$; wówczas nie ma wartości największej.

Jeśli ograniczymy dziedzinę funkcji kwadratowej do przedziału domkniętego, to funkcja określona w tym przedziale przyjmuje zawsze wartość największą i wartość najmniejszą. Zastanówmy się, jak można wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Przykład 1.

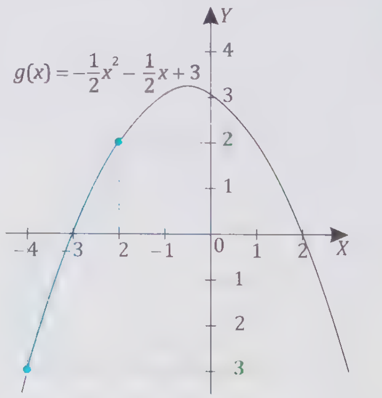
Na rysunkach przedstawione są wykresy dwóch funkcji kwadratowych $f(x) = x^2 - 4x + 3$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$. Rozważmy te funkcje w przedziałach domkniętych (wykresy funkcji odpowiadające tym przedziałom zostały zaznaczone kolorem niebieskim). Stwierdzimy na podstawie wykresu, jaka jest najmniejsza oraz największa wartość funkcji w tym przedziale.

$f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in \left\langle \frac{1}{2}, 3 \right\rangle$



W przedziale $\left\langle \frac{1}{2}, 3 \right\rangle$ funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą 1, a największą wartość równą $1\frac{1}{4}$ (na jednym z końców przedziału).

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3, \quad x \in \langle -4, -2 \rangle$



W przedziale $\langle -4, -2 \rangle$ funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość równą -3, zaś największą wartość równą 2 (obie wartości na końcach przedziału).

Najmniejszej oraz największej wartości funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym szukamy w trzech punktach należących do wykresu funkcji: w wierzchołku paraboli oraz na końcach wykresu, wyznaczonych przez końce przedziału.

Jak znaleźć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym bez szkicowania wykresu tej funkcji?

Aby znaleźć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, w przedziale domkniętym $\langle m, n \rangle$, wystarczy wykonać następujące czynności:

1. Obliczyć wielkości: $f(m), f(n)$ oraz x_w.
2. Sprawdzić, czy x_w należy do przedziału $\langle m, n \rangle$, a następnie:
   - jeśli $x_w \in \langle m, n \rangle$, wówczas:
     – obliczyć y_w
     – wybrać wartość największą i wartość najmniejszą spośród liczb $f(m), f(n)$, y_w; są to szukane wielkości;
   - jeśli $x_w \notin \langle m, n \rangle$, wówczas:
     – wybrać wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w danym przedziale spośród liczb $f(m)$ i $f(n)$.

Przykład 2.

Nie szkicując wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 2x - 8$, obliczymy największą oraz najmniejszą wartość tej funkcji w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$.

1. Wyznaczamy potrzebne wielkości.
   $f(0) = -8 \quad f(4) = -16 \quad x_w = 1$
2. Zauważamy, że $x_w \in \langle 0, 4 \rangle$. Zatem obliczamy y_w.
   $y_w = -7$

(Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ jest ujemny, więc funkcja kwadratowa przyjmuje wartość największą równą -7 w całym zbiorze $\boldsymbol{R}$).

Funkcja f w przedziale domkniętym $\langle 0, 4 \rangle$ przyjmuje największą wartość równą -7; najmniejszą wartością funkcji jest mniejsza z liczb $f(0)$ oraz $f(4)$, czyli -16.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ w przedziale:
   a) $\langle 2, 6 \rangle$ b) $\langle -10, 0 \rangle$
2. Wyznacz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}(x+5)^2 - 10$ w przedziale:
   a) $\langle -6, -4 \rangle$ b) $\langle -3, 5 \rangle$

Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

Wiedza o własnościach funkcji kwadratowej ma szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu problemów praktycznych. W tym temacie przedstawimy przykłady wykorzystujące wzór funkcji kwadratowej, jej wykres oraz wartość największą (najmniejszą) funkcji, przyjmowaną w określonym przedziale.

Przykład 1.

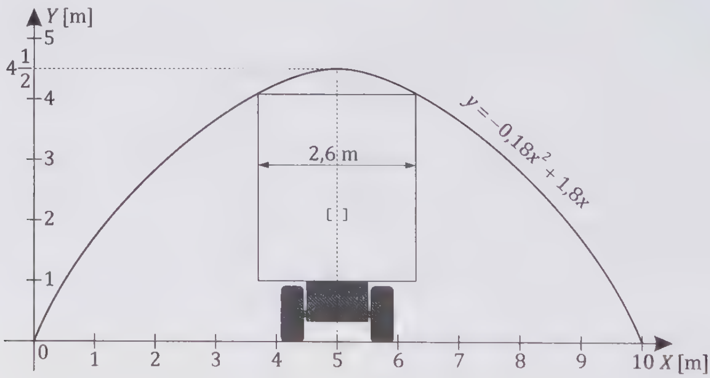
Droga jednokierunkowa prowadzi przez tunel, którego przekrój poprzeczny ma kształt paraboli, którą można opisać równaniem $y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x$, gdzie $x \in \langle 0, 10\rangle$. Jaką maksymalną wysokość może mieć samochód dostawczy o szerokości 2,6 m, jadący środkiem tunelu, aby zmieścił się w tym tunelu?

Zbudujmy model matematyczny tej sytuacji. Naszkicujmy fragment wykresu funkcji $y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x$ (tę część, która „opisuje" tunel). Miejsca zerowe odczytamy ze wzoru funkcji w postaci iloczynowej:

$$y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x = -0{,}18x(x - 10),\text{ stąd } x_1 = 0,\ x_2 = 10.$$

Okazuje się, że w podstawie tunel ma szerokość 10 m.

Osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x = 5$; współrzędne wierzchołka paraboli są równe $\left(5, 4\frac{1}{2}\right)$.



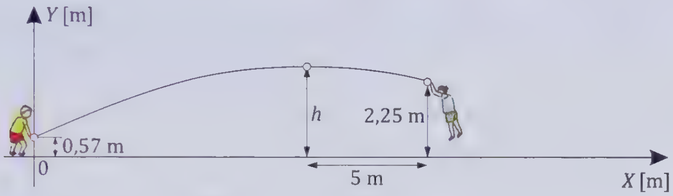
Samochód ciężarowy ma szerokość 2,6 m. Zatem boki samochodu będą znajdowały się w odległości 1,3 m od osi symetrii tunelu. Obliczmy wysokość tunelu w tej sytuacji:

$$f(6{,}3) = -0{,}18 \cdot (6{,}3)^2 + 1{,}8 \cdot 6{,}3 = 4{,}1958 \text{ (m)}$$

Aby samochód mógł przejechać przez tunel, jego wysokość musi być mniejsza od 4,1958 m.

Przykład 2.

Boisko do siatkówki ma długość 18 m. Podczas meczu siatkówki zawodniczka z drużyny „Arka" serwowała z wysokości 0,57 m, wzdłuż linii bocznej (piłka znajdowała się nad końcową linią boiska). Piłka przeleciała na boisko drużyny przeciwnej, osiągając maksymalną wysokość dokładnie nad siatką. Zawodniczka z drużyny „Barka" odebrała piłkę na wysokości 2,25 m, w odległości 5 m od siatki, na linii toru lotu piłki. Wiedząc, że modelem matematycznym toru lotu piłki jest fragment paraboli o równaniu $y = -0{,}03x^2 + bx + c$ (gdzie x oznacza odległość punktu boiska od końcowej linii boiska, z której wykonano serw), wyznaczymy współczynniki b i c oraz obliczymy, jaką maksymalną wysokość osiągnęła piłka.



Zawodniczka z drużyny „Barka" odebrała piłkę na linii znajdującej się w odległości 14 m od linii serwu. Możemy przyjąć, że dziedziną funkcji $y = -0{,}03x^2 + bx + c$ jest zbiór $D = \langle 0, 14\rangle$.
Zauważmy, że $f(0) = 0{,}57$ oraz $f(14) = 2{,}25$.
Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} c = 0{,}57 \\ -0{,}03\cdot 14^2 + b\cdot 14 + c = 2{,}25 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0{,}57 \\ 14b + c = 8{,}13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0{,}57 \\ b = 0{,}54 \end{cases}$$

Wzór funkcji opisującej tor lotu piłki ma postać: $y = -0{,}03x^2 + 0{,}54x + 0{,}57$. Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji jest ujemny. Aby więc obliczyć, jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja, wyznaczamy najpierw x_w.

$x_w = 9, \quad 9 \in \langle 0, 14\rangle$

Następnie obliczamy y_w.

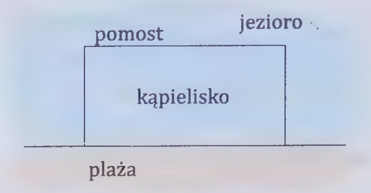
$y_w = f(x_w)$, więc $f(9) = 3$

Piłka osiągnęła maksymalną wysokość 3 m.

W naukach przyrodniczych dużą rolę odgrywają zagadnienia związane z wyznaczaniem tych argumentów funkcji, dla których funkcja przyjmuje (w pewnym przedziale) największą lub najmniejszą wartość. Zadania dotyczące takich zagadnień określa się mianem zadań optymalizacyjnych.

Przykład 3.

Właściciel jeziora chce wybudować pomost, który wyznaczałby kąpielisko strzeżone. Kąpielisko ma mieć kształt prostokąta.

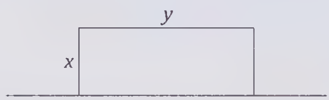


Właściciel może sfinansować budowę 64 m pomostu. Zauważmy, że w zależności od wymiarów kąpieliska (przy ustalonej długości pomostu) jego powierzchnia może być różna, na przykład:

- prostokąt o wymiarach 5 m na 54 m ma pole 270 m^2,
- prostokąt o wymiarach 14 m na 36 m ma pole 504 m^2,
- prostokąt o wymiarach 22 m na 20 m ma pole 440 m^2.

Jakie wymiary powinno więc mieć kąpielisko, aby jego powierzchnia była największa?

Przyjmijmy oznaczenia:



x – długość boku kąpieliska prostopadłego do brzegu (w metrach)
y – długość boku kąpieliska równoległego do brzegu (w metrach)

$2x + y = 64$

$P = x \cdot y$ — pole powierzchni kąpieliska

$y = 64 - 2x$, więc $\qquad P(x) = x \cdot (64 - 2x)$

Otrzymaliśmy funkcję opisującą pole P powierzchni kąpieliska w zależności od długości boku x (prostopadłego do brzegu). Ustalmy dziedzinę tej funkcji. Długości boków są liczbami dodatnimi, więc:

$(x > 0 \text{ i } y > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ i } 64 - 2x > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ i } 32 > x) \Leftrightarrow x \in (0, 32)$,

zatem $D = (0, 32)$.

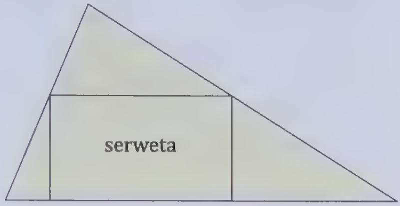
Porządkujemy wzór funkcji: $P(x) = -2x^2 + 64x$, gdzie $x \in (0, 32)$.
Wykresem funkcji $y = -2x^2 + 64x$ w zbiorze $\boldsymbol{R}$ jest parabola zwrócona ramionami do dołu; funkcja osiąga największą wartość dla argumentu 16. Zauważmy, że 16 należy również do dziedziny funkcji pola określonej przez warunki zadania. Z tego wynika, że funkcja $P(x) = -2x^2 + 64x$, $x \in (0, 32)$, osiąga największą wartość dla argumentu 16. Długość boku równoległego do brzegu obliczymy następująco:

$y = 64 - 2 \cdot 16 = 32$

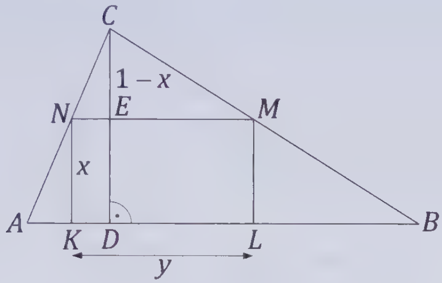
Pole powierzchni kąpieliska będzie największe wtedy, gdy jego wymiary będą wynosić 16 m na 32 m $\left(\text{i będzie równe } 512 \text{ m}^2\right)$.

Przykład 4.

Z kawałka płótna w kształcie trójkąta ostrokątnego o podstawie 2 m i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 1 m hafciarka chce wyciąć prostokątną serwetę, w sposób przedstawiony na rysunku. Jakie powinny być wymiary serwety, aby jej pole było jak największe?



Przygotujmy rysunek z oznaczeniami.



$|AB| = 2$ m, $|CD| = 1$ m,

$|ML| = |NK| = x$, $|NM| = |KL| = y$, gdzie $x > 0$ i $y > 0$.

Pole serwety wyraża się wzorem $P = x \cdot y$. Zauważmy, że $\Delta NMC \sim \Delta ABC$ i zachodzi równość

$$\frac{|NM|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|CD|}, \text{ czyli}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{1-x}{1}, \text{ skąd}$$

$$y = 2 - 2x.$$

Po podstawieniu $y = 2 - 2x$ do wzoru $P = x \cdot y$ otrzymujemy wzór na pole serwety w zależności od długości jednego z jej boków:

$$P(x) = x \cdot (2 - 2x) = -2x^2 + 2x$$

Należy jeszcze określić dziedzinę tej funkcji. Zauważ, że $x \in (0, 1)$ (dlaczego?). Wyznaczmy argument, dla którego funkcja pola P przyjmuje największą wartość. Wykresem funkcji jest parabola, ramionami skierowana do dołu. Funkcja osiąga największą wartość dla argumentu $\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ należy do przedziału $(0, 1)$, więc spełnia warunki zadania. Obliczmy długość drugiego boku serwety: $y = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Hafciarka powinna wyciąć serwetę o wymiarach $\frac{1}{2}$ m na 1 m.

Przykład 5.

Właściciel sklepu kupuje w hurtowni gry komputerowe w cenie 80 zł za sztukę, a sprzedaje po 130 zł. Miesięcznie sprzedaje 40 gier. Sprzedawca zbadał rynek i oszacował, że każda obniżka ceny gry w jego sklepie o 1 zł zwiększy liczbę sprzedanych gier o jedną sztukę. Jaką powinien ustalić nową cenę właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy?

Oznaczmy przez n ($n \in N_+$) wysokość obniżki ceny gry w złotych. Po obniżce ceny o n zł ($n < 50$) cena jednej gry w sklepie będzie wynosić $(130 - n)$ zł, ale jednocześnie liczba sprzedanych gier w miesiącu będzie równa $(40 + n)$. Wartość hurtowa sprzedanych gier (w zł) jest równa $(40 + n) \cdot 80$, a kwota (w zł) uzyskana ze sprzedanych gier w sklepie wynosi

$$(40 + n)(130 - n)$$

Miesięczny zysk właściciela sklepu jest równy

$$f(n) = (40 + n)(130 - n) - (40 + n)80$$

Porządkujemy wzór funkcji f:

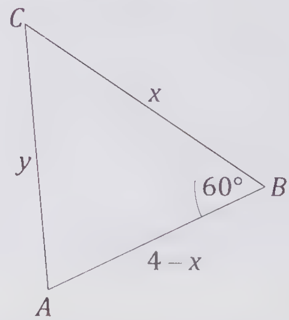
$$f(n) = -n^2 + 10n + 2000, \text{ gdzie } n \in N_+ \text{ i } n < 50$$

Funkcja f przyjmuje największą wartość dla argumentu 5 (5 spełnia warunki zadania). Właściciel sklepu osiągnie największy miesięczny zysk wówczas, gdy ustali cenę gry w wysokości 125 zł.

Przykład 6.

Suma długości dwóch boków trójkąta wynosi 4, a miara kąta pomiędzy tymi bokami jest równa 60°. Obliczymy, jaki może być najmniejszy obwód tego trójkąta.

Analiza:
Przyjmijmy oznaczenia:
$|BC| = x$, $|AB| = 4 - x$, $x \in (0, 4)$
$|AC| = y$, $0 < y < 4$
L – obwód trójkąta ABC
$L = y + 4$



Do wyznaczenia długości boku AC, w zależności od x, skorzystamy z twierdzenia cosinusów.

Rozwiązanie:
Z twierdzenia cosinusów:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |CB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |CB| \cdot \cos 60^\circ$$

$$y^2 = (4 - x)^2 + x^2 - 2 \cdot (4 - x) \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 16 - 8x + x^2 + x^2 - 4x + x^2$$

$$y^2 = 3x^2 - 12x + 16$$

Zauważmy, że wyrażenie $3x^2 - 12x + 16$ jest dodatnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$ (parabola będąca wykresem funkcji $g(x) = 3x^2 - 12x + 16$ skierowana jest ramionami do góry i leży nad osią OX, bo $\Delta < 0$). Zatem

$$y = \sqrt{3x^2 - 12x + 16}$$

Stąd obwód trójkąta ABC, w zależności od x, wynosi:

$$L(x) = \sqrt{3x^2 - 12x + 16} + 4, \text{ gdzie } x \in (0, 4).$$

Obwód jest najmniejszy, gdy funkcja

$$g(x) = 3x^2 - 12x + 16$$

przyjmuje najmniejszą wartość w zbiorze $(0, 4)$. Obliczmy zatem odciętą wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji g:

$$x_w = \frac{-(-12)}{6} = 2$$

Ponieważ $x_w \in (0, 4)$, więc jeśli $x = 2$, to wartość funkcji g jest najmniejsza i wynosi 4, ponieważ:

$$g(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 16 = 4$$

Wówczas

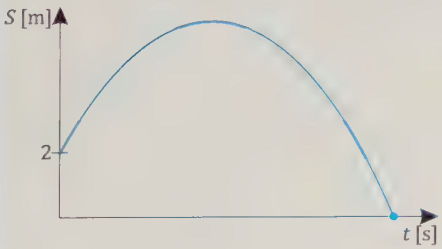
$$y = \sqrt{g(2)} = \sqrt{4} = 2 \text{ (spełnione jest założenie } 0 < y < 4).$$

Najmniejszy obwód trójkąta może być równy 6.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rzucono kamień pionowo do góry z prędkością początkową 12 m/s. Zależność między wysokością S kamienia a czasem t wyraża się wzorem $S(t) = 12t - 5t^2$. Jaką największą wysokość osiągnie ten kamień?

2. Tor lotu piłki wyrzuconej z wysokości 2 m ilustruje rysunek.



Przyjmując, że krzywa na rysunku jest fragmentem paraboli, oraz wiedząc, że po 4,9 s lotu piłka osiągnęła największą wysokość równą 26,01 m, wyznacz wzór funkcji w postaci ogólnej, opisującej związek między wysokością, na jaką wzniosła się piłka, a czasem lotu. Podaj dziedzinę tej funkcji. Po ilu sekundach lotu piłka spadła na ziemię?

3. Rozpatrujemy trójkąty równoramienne, w których suma długości podstawy i wysokości opuszczonej na tę podstawę jest równa 12 cm. Wyznacz długości boków trójkąta mającego największe pole.

4. O godzinie 13^{00} statek „Batory" płynący z portu P na zachód ze stałą prędkością 20 km/h znajduje się w odległości 10 km od tego portu, zaś statek „Moniuszko" płynący na północ do portu P ze stałą prędkością 40 km/h znajduje się w odległości od tego portu 6 razy większej niż statek „Batory". Oblicz, o której godzinie odległość między statkami będzie najmniejsza i ile ta odległość będzie wynosić.

Równania kwadratowe

Do tej pory rozwiązywałeś głównie równania liniowe, czyli takie, które można doprowadzić do postaci $ax + b = 0$ (x jest niewiadomą; a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi). Obecnie zajmiemy się równaniami kwadratowymi.

Definicja 1.
Równaniem kwadratowym (z niewiadomą x) nazywamy równanie, które można doprowadzić do postaci $ax^2 + bx + c = 0$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

W równaniu kwadratowym nie da się wyznaczyć niewiadomej x w taki sposób, jak w przypadku równań liniowych. Można natomiast korzystać z własności funkcji kwadratowej. Rozwiązać równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, oznacza wyznaczyć argumenty funkcji $y = ax^2 + bx + c$, dla których przyjmuje ona wartość zero. Zatem rozwiązanie równania kwadratowego sprowadzamy do obliczenia miejsc zerowych odpowiedniej funkcji kwadratowej. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta = b^2 - 4ac$:

- nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$
- ma jedno rozwiązanie, $x_0 = \frac{-b}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$
- ma dwa rozwiązania, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Korzystając z twierdzenia 1., możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe.

Przykład 1.

Rozwiążemy równania:

a) $2x^2 - x + 10 = 0$

b) $\frac{1}{3}x^2 + 6x + 27 = 0$

c) $x^2 - x - 6 = 0$

d) $(3x - 2)^2 = (x + 1)(x + 4)$

Ad a) Wypisujemy współczynniki równania:

$a = 2, \ b = -1, \ c = 10$

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -79, \ \ -79 < 0$

Ponieważ wyróżnik dla funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - x + 10$ jest ujemny, więc równanie $2x^2 - x + 10 = 0$ nie ma rozwiązań (czyli jest sprzeczne).

Ad b) Współczynniki są następujące

$$a = \frac{1}{3},\ b = 6,\ c = 27$$

Obliczamy wyróżnik.

$$\Delta = 36 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 = 0$$

Wyróżnik dla funkcji kwadratowej $y = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 27$ jest równy zeru, więc równanie $\frac{1}{3}x^2 + 6x + 27 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie. Obliczamy:

$$x_0 = \frac{-6}{2 \cdot \frac{1}{3}},\ \text{czyli}\ x_0 = -9$$

Rozwiązaniem równania jest liczba –9.

Ad c) Wyznaczamy wyróżnik dla funkcji kwadratowej $y = x^2 - x - 6$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25,\ \text{skąd}\ \sqrt{\Delta} = 5.$$

Równanie $x^2 - x - 6 = 0$ ma dwa różne rozwiązania. Obliczamy:

$$x_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot 1} = -2 \qquad x_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot 1} = 3$$

Rozwiązaniami równania są dwie liczby –2 oraz 3.

Ad d) Najpierw należy doprowadzić dane równanie do postaci $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

$$(3x - 2)^2 = (x + 1)(x + 4)$$
$$9x^2 - 12x + 4 = x^2 + 4x + x + 4$$
$$8x^2 - 17x = 0$$

Wypisujemy współczynniki.

$$a = 8 \quad b = -17 \quad c = 0$$

Obliczamy wyróżnik dla funkcji kwadratowej $y = 8x^2 - 17x$.

$$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 0 = 17^2 \qquad \sqrt{\Delta} = 17$$

Równanie ma dwa rozwiązania, które wyznaczamy.

$$x_1 = \frac{17 - 17}{2 \cdot 8} = 0 \qquad x_2 = \frac{17 + 17}{2 \cdot 8} = 2\frac{1}{8}$$

Rozwiązaniami równania są dwie liczby: 0 oraz $2\frac{1}{8}$.

W niektórych przypadkach możemy rozwiązać równanie kwadratowe w inny sposób. Przyjrzyjmy się równaniom, które można doprowadzić do postaci $ax^2 + c = 0$, gdzie $a \cdot c > 0$.

Przykład 2.

Rozwiążemy równania:

a) $5x^2+1=0$ b) $-3x^2-2=0$

Ad a) Lewa strona równania jest sumą dwóch wyrażeń, z których jedno przyjmuje wartości nieujemne $\left(5x^2\right)$, a drugie jest dodatnie (1). Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x lewa strona przyjmuje wartość dodatnią i nie może być równa zeru. Wnioskujemy zatem, że równanie $5x^2+1=0$ nie ma rozwiązań.

Ad b) Lewa strona równania jest sumą dwóch wyrażeń, z których jedno przyjmuje wartości niedodatnie $\left(-3x^2\right)$, a drugie jest ujemne (-2). Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x lewa strona równania jest ujemna i nie może się równać zeru. Równanie $-3x^2-2=0$ nie ma rozwiązań.

Spróbuj uogólnić rozumowanie z przykładu 2. i omówić rozwiązanie równania $ax^2+c=0$ w przypadku, gdy $a\cdot c>0$.

W rozwiązywaniu równań kwadratowych bardzo często stosujemy metodę wykorzystującą poniższą własność.

Iloczyn dwóch liczb jest równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z nich jest równa zeru, co można zapisać symbolicznie:

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow (a=0 \vee b=0)$$

Wówczas staramy się przedstawić trójmian kwadratowy w postaci iloczynu wyrażeń liniowych. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy trójmian ma miejsca zerowe.

Przykład 3.

Rozwiążemy równania:

a) $7x^2=0$ b) $3x^2-6x=0$ c) $(x-5)(x+3)=-2x(x-5)$

Ad a) Wyrażenie $7x^2$ przyjmuje wartość 0 tylko wtedy, gdy $x^2=0$, czyli wtedy, gdy $x=0$. To znaczy, że jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Ad b) Równanie $3x^2-6x=0$ ma postać $ax^2+bx=0$ $(c=0)$. W takiej sytuacji możemy wyłączyć x poza nawias:

$x\cdot(3x-6)=0$, stąd

$x=0 \ \vee \ 3x-6=0$, co znaczy, że

$x=0 \ \vee \ x=2$

Równanie ma dwa rozwiązania: 0 oraz 2.
Zwróć uwagę na to, że jeśli równanie ma postać $ax^2+bx=0$, to jednym z jego rozwiązań jest zawsze liczba 0.

Ad c) Równanie zapisujemy w postaci:

$(x-5)(x+3)+2x(x-5)=0$

Równanie można sprowadzić do postaci $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, następnie ze wzorów na miejsca zerowe funkcji kwadratowej obliczyć jego rozwiązania.
Ale możemy też zauważyć, że lewa strona jest sumą dwóch iloczynów, w których występuje taki sam czynnik $(x - 5)$. Korzystając z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, wyłączymy ten czynnik poza nawias, w którym pozostaną wyrażenia $(x + 3)$ oraz $2x$:

$(x-5) \cdot [(x+3)+2x] = 0$

$(x-5) \cdot (3x+3) = 0$, stąd

$x-5=0 \lor 3x+3=0$

$x=5 \lor x=-1$

Równanie ma dwa rozwiązania: 5 oraz -1.

Stosując metodę przedstawioną w przykładzie 3., często rozwiążemy równanie kwadratowe szybciej, niż gdybyśmy sprowadzali je do postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, a następnie korzystali ze wzorów na miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Nie zawsze jednak widzimy wspólny czynnik, który pozwoliłby przedstawić wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynu dwóch wyrażeń liniowych. Czasem wygodne mogą się okazać wzory skróconego mnożenia.

Przykład 4.

Rozwiążemy równania:

a) $4x^2 = 25$ b) $x^2 + 2x + 1 = 0$ c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Ad a) Równanie przedstawiamy w postaci $ax^2 + c = 0$ $(a \cdot c < 0)$.

$4x^2 - 25 = 0$

Lewa strona jest różnicą kwadratów, więc stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$(2x)^2 - 5^2 = 0$

$(2x-5)(2x+5) = 0$, stąd

$2x-5=0 \lor 2x+5=0$

$x=2{,}5 \lor x=-2{,}5$

Równanie ma dwa rozwiązania: $2{,}5$ oraz $-2{,}5$.

Spróbuj wyznaczyć rozwiązania równania $ax^2 + c = 0$ $(a \cdot c < 0)$ w przypadku ogólnym.

Ad b) Na podstawie wzoru na kwadrat sumy równanie $x^2 + 2x + 1 = 0$ można zapisać jako

$(x+1)^2 = 0$, skąd

$x+1=0$

$x=-1$

Rozwiązaniem równania jest tylko liczba -1.

Ad c) Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 0$

$(2x-3)^2=0$, zatem
$2x-3=0$
$x=1{,}5$
Równanie ma tylko jedno rozwiązanie: 1,5.

Na koniec omówimy inne metody rozwiązywania równań kwadratowych.

Przykład 5.

Rozwiążemy równanie $x^2-10x+5=0$.

W rozwiązaniu tego równania skorzystamy najpierw ze wzoru: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.
W tym celu przekształcimy lewą stronę równania w następujący sposób:

$x^2-10x+5=0$
$(x^2-2\cdot x\cdot 5+25)-25+5=0$
$(x-5)^2-20=0$

Otrzymane równanie możemy rozwiązać na dwa różne sposoby.
I sposób – korzystamy ze wzoru: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$(x-5)^2-\left(\sqrt{20}\right)^2=0$
$(x-5)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2=0$
$\left(x-5-2\sqrt{5}\right)\left(x-5+2\sqrt{5}\right)=0$
$x-5-2\sqrt{5}=0 \lor x-5+2\sqrt{5}=0$
$x=5+2\sqrt{5} \lor x=5-2\sqrt{5}$

II sposób – korzystamy z własności wartości bezwzględnej.

$(x-5)^2=20$
Obie strony równania są nieujemne, więc możemy obliczyć pierwiastek kwadratowy każdej ze stron. Stąd:
$\sqrt{(x-5)^2}=\sqrt{20}$
$|x-5|=2\sqrt{5}$
$x-5=-2\sqrt{5} \lor x-5=2\sqrt{5}$, zatem
$x=5-2\sqrt{5} \lor x=5+2\sqrt{5}$

Równanie $x^2-10x+5=0$ ma dwa rozwiązania: $5-2\sqrt{5}$ oraz $5+2\sqrt{5}$.

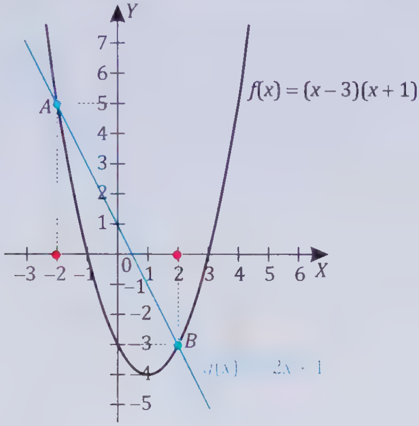
Przykład 6.

Rozwiążemy graficznie równanie $(x-3)(x+1)=-2x+1$.

Dane równanie możemy potraktować jako równość wartości dwóch funkcji tej samej zmiennej x:

funkcji kwadratowej $f(x)=(x-3)(x+1)$ oraz
funkcji liniowej $g(x)=-2x+1$.

Rozwiązać równanie $(x-3)(x+1)=-2x+1$ to wyznaczyć wszystkie argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują tę samą wartość, albo wykazać, że takie argumenty nie istnieją. W tym celu we wspólnym układzie współrzędnych naszkicujemy wykresy obu funkcji. Wykresem funkcji f jest parabola ramionami skierowana do góry, która ma z osią OY punkt wspólny $(0,-3)$. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe -1 oraz 3. Wierzchołek paraboli to punkt $(1,-4)$. Wykresem funkcji g jest prosta, która ma z osią OY punkt wspólny $(0, 1)$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 0,5 (sprawdź!).



Wykresy przecięły się w punktach $A(-2, 5)$ oraz $B(2,-3)$.
Sprawdzenie:

- $f(-2)=(-2-3)(-2+1)=-5\cdot(-1)=5$ i $g(-2)=-2\cdot(-2)+1=4+1=5$
- $f(2)=(2-3)(2+1)=(-1)\cdot 3=-3$ i $g(2)=-2\cdot 2+1=-4+1=-3$.

Oznacza to, że dla argumentów -2 oraz 2 funkcje f i g przyjmują tę samą wartość. Rozwiązaniami równania $(x-3)(x+1)=-2x+1$ są liczby -2 oraz 2.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania dwoma sposobami:
   a) $-x^2+81=0$ b) $4x^2+16=0$ c) $-3x^2-7=0$ d) $0{,}5x^2+8x=0$

2. Rozwiąż równania dwoma sposobami:
   a) $x^2-16x+64=0$ b) $4x^2+4x+1=0$
   c) $x(4+x)+x^2=0$ d) $(x+1)(x-1)=(2x+5)(x+1)$

3. Rozwiąż równania:
   a) $\frac{1}{2}x^2-x+8=0$ b) $x^2-2x-3=0$
   c) $(x+0{,}5)^2=2x$ d) $-(x+2)^2+16x^2=0$

4. Rozwiąż równania, stosując wzór na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy dwóch wyrażeń, jeśli:
   a) $x^2-6x+6=0$ b) $4x^2+12x+1=0$

5. Rozwiąż graficznie równania:
   a) $x^2-4x=2x-5$ b) $4-(x-1)^2=4x$

Równania prowadzące do równań kwadratowych

Umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych jest przydatna do rozwiązywania równań innego rodzaju, np. równań typu $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ lub niektórych równań, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka stopnia parzystego.

I. Równania typu $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$

Równanie $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Równanie dwukwadratowe łatwo daje się sprowadzić do równania kwadratowego przez wprowadzenie niewiadomej pomocniczej t, gdzie $t = x^2$. Wówczas równanie $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ można zapisać w postaci $at^2 + bt + c = 0$, gdzie $t = x^2$.

Przykład 1.

Rozwiążemy równania:

a) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Ad a) Równanie $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ można zapisać w postaci

$$\left(x^2\right)^2 - 6x^2 - 7 = 0$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą t, gdzie $x^2 = t$ i sprowadzamy równanie dwukwadratowe do równania kwadratowego $t^2 - 6t - 7 = 0$ (z niewiadomą t). Równanie to ma dwa rozwiązania -1 oraz 7 (sprawdź!). Następnie wracamy do podstawienia i otrzymujemy:

$x^2 = -1$ $\vee$ $x^2 = 7$

równanie sprzeczne $x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$

Równanie dwukwadratowe $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ ma dwa rozwiązania: $-\sqrt{7}$ oraz $\sqrt{7}$.

Ad b) Równanie dwukwadratowe $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ sprowadzamy do równania kwadratowego z niewiadomą t, przez podstawienie $x^2 = t$. Otrzymujemy:

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$\Delta = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$, $t = 4 \vee t = 9$, stąd

$x^2 = 4 \vee x^2 = 9$, czyli

$x = -2 \vee x = 2 \vee x = -3 \vee x = 3$

Równanie $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ma cztery rozwiązania: $-3, -2, 2, 3$.

Przykład 2.

Wykażemy, że równanie $x^4 - 6x^2 + 18 = 0$ jest sprzeczne.

Stosujemy podstawienie $x^2 = t$ i równanie $x^4 - 6x^2 + 18 = 0$ sprowadzamy do równania kwadratowego:

$t^2 - 6t + 18 = 0$

$\Delta = -36$, $-36 < 0$

Wyróżnik równania kwadratowego jest ujemny, więc równanie to nie ma rozwiązań.
Zatem równanie dwukwadratowe $x^4 - 6x^2 + 18 = 0$ jest sprzeczne.

Powyższe przykłady pokazują, że liczba rozwiązań równania dwukwadratowego $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ zależy nie tylko od liczby rozwiązań równania kwadratowego $at^2 + bt + c = 0$, gdzie $x^2 = t$, ale także od znaków tych rozwiązań (rozwiązania ujemne, dodatnie, równe zeru).

Przykład 3.

Zastanówmy się, kiedy równanie dwukwadratowe:
a) nie ma rozwiązań
b) ma trzy różne rozwiązania.

Ad a) Aby równanie dwukwadratowe $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ nie miało rozwiązań, wystarczy, że równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$, gdzie $t = x^2$, spełnia jeden z poniższych warunków.
1) Równanie kwadratowe nie ma rozwiązań $(\Delta < 0)$.
2) Równanie kwadratowe ma jedno rozwiązania, ale rozwiązanie to jest ujemne $(\Delta = 0$ i $t_0 < 0)$.
3) Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania, ale oba rozwiązania są ujemne $(\Delta > 0$ i $t_1 < 0$ i $t_2 < 0)$.

W tabeli poniżej podane są przykłady równań kwadratowych i odpowiadających im równań dwukwadratowych, uwzględniających wszystkie trzy przypadki.

przypadek	równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0,\ a \neq 0$	równanie dwukwadratowe $ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a \neq 0$
1)	np. $t^2 - 3t + 5 = 0$ $\Delta = -11$	$x^4 - 3x^2 + 5 = 0$
2)	np. $(4t + 1)^2 = 0$, czyli $16t^2 + 8t + 1 = 0,\ \Delta = 0,\ t_0 = -0{,}25$	$16x^4 + 8x^2 + 1 = 0$
3)	np. $(t + 1)(t + 3) = 0$, czyli $t^2 + 4t + 3 = 0,\ \Delta = 4,\ t_1 = -1, t_2 = -3$	$x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

Ad b) Aby równanie dwukwadratowe $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ miało trzy różne rozwiązania potrzeba, aby równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$, gdzie $t = x^2$ miało dwa rozwiązania, z których jedno jest dodatnie, a drugie równe zeru. Przykładem takiego równania kwadratowego jest:

$$t(t - 8) = 0, \text{ czyli } t^2 - 8t = 0.$$

Zatem równanie dwukwadratowe ma postać $x^4 - 8x^2 = 0$.

II. Równania, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka stopnia parzystego

Równania, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka, nazywamy **równaniami pierwiastkowymi**. Nas interesują te, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka stopnia parzystego i które można sprowadzić do równań kwadratowych.

Przykład 4.

Rozwiążemy równania:

a) $x+\sqrt{x+2}=4$ b) $x^2=4\sqrt{x^2+1}-5$ c) $\sqrt{x-3}+2=3\sqrt[4]{x-3}$

Ad a) Równanie $x+\sqrt{x+2}=4$ sprowadzimy do równania kwadratowego przez podstawienie niewiadomej pomocniczej. W tym celu przekształcimy je równoważnie, dodając do obu stron równania liczbę 2. Otrzymujemy równanie mające postać:

$$(x+2)+\sqrt{x+2}=6$$

Dziedziną równania jest przedział $\langle -2, +\infty)$. Podstawiamy:

$$\sqrt{x+2}=t$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2+t-6=0$$

$$\Delta=25,\ t_1=-3,\ t_2=2$$

Jeśli $t_1=-3$, to otrzymujemy równanie

$$\sqrt{x+2}=-3,$$

które jest sprzeczne.

Jeśli $t_2=2$, to otrzymujemy równanie

$$\sqrt{x+2}=2, \quad \text{skąd}$$

$$x+2=4, \text{ czyli}$$

$$x=2$$

Liczba 2 należy do dziedziny równania.

Równanie $x+\sqrt{x+2}=4$ ma jedno rozwiązanie równe 2.

Ad b) Równanie $x^2=4\sqrt{x^2+1}-5$ sprowadzimy do równania kwadratowego. Łatwo się domyślić, że podstawienie ma postać: $t=\sqrt{x^2+1}$. W tym celu przekształcimy w sposób równoważny dane równanie, dodając do obu jego stron liczbę 1. Otrzymujemy:

$$x^2+1=4\sqrt{x^2+1}-4,$$

skąd

$$\left(x^2+1\right)-4\sqrt{x^2+1}+4=0$$

Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}$, ponieważ wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej. Po podstawieniu $t=\sqrt{x^2+1}$ otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2-4t+4=0$$

Możemy je zapisać w postaci

$(t-2)^2=0$, skąd

$t=2$

Wracamy do podstawienia i otrzymujemy:

$\sqrt{x^2+1}=2$, skąd mamy

$x^2+1=4$, czyli

$x^2=3$,

zatem

$x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$

Dziedziną równania pierwiastkowego jest zbiór liczb rzeczywistych, więc obie liczby $-\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3}$ należą do dziedziny.

Rozwiązaniami równania $x^2=4\sqrt{x^2+1}-5$ są liczby $-\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3}$.

Ad c) Dziedziną równania $\sqrt{x-3}+2=3\sqrt[4]{x-3}$ jest przedział $\langle 3, +\infty)$. Równanie pierwiastkowe sprowadzamy do równania kwadratowego przez podstawienie: $\sqrt[4]{x-3}=t$, wtedy $t^2=\sqrt{x-3}$.

Otrzymujemy

$t^2+2=3t$, czyli

$t^2-3t+2=0$

$\Delta=1, \sqrt{\Delta}=1, t_1=1, t_2=2$

Wracamy do podstawienia

$\sqrt[4]{x-3}=1 \vee \sqrt[4]{x-3}=2$, stąd

$x-3=1 \vee x-3=16$

$x=4 \vee x=19$

Oba rozwiązania należą do dziedziny.

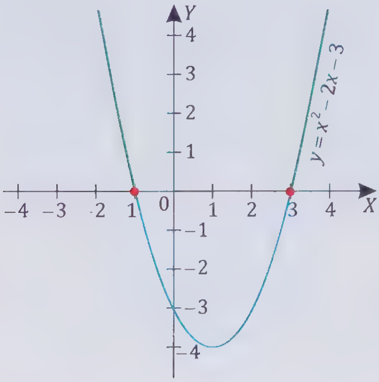
Równanie $\sqrt{x-3}+2=3\sqrt[4]{x-3}$ ma dwa rozwiązania: 4 oraz 19.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:
   a) $x^4+2x^2-3=0$ b) $x^4+20=12x^2$ c) $9x^4+19x^2+2=0$
   d) $4x^4+20x^2+25=0$ e) $x^4=4x^2$ f) $3x^4-25x^2=18$
2. Podaj przykład równania dwukwadratowego, które:
   a) ma dwa różne rozwiązania b) ma trzy różne rozwiązania.
3. Rozwiąż równania:
   a) $2\sqrt{x+1}+x=14$ b) $x^2-4\sqrt{x^2+4}+7=0$ c) $\sqrt{x+5}=10-3\sqrt[4]{x+5}$

Nierówności kwadratowe

Rysunek przedstawia wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Na podstawie wykresu tej funkcji umiesz już stwierdzić, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość zero, dla jakich argumentów wartości danej funkcji są dodatnie, a dla jakich ujemne.



Przypomnijmy: miejsca zerowe funkcji to pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresu z osią *OX* (zaznaczonych kolorem czerwonym). Są to liczby -1 i 3.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 3)$$

Powyżej osi *OX* znajdują się punkty wykresu funkcji (zaznaczone kolorem zielonym), których druga współrzędna jest dodatnia.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

Poniżej osi *OX* znajdują się punkty wykresu funkcji (zaznaczone kolorem niebieskim), których druga współrzędna jest ujemna.

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

Umiejętność odczytywania z wykresu funkcji argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne, lub równe zeru, jest bardzo przydatna w rozwiązywaniu nierówności kwadratowych.

Definicja 1.
Nierównością kwadratową (z niewiadomą x) nazywamy każdą nierówność, którą można doprowadzić do postaci $ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, lub $ax^2 + bx + c < 0$, lub $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Odczytanie zbioru argumentów funkcji, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), jest równoważne rozwiązaniu nierówności $x^2 - 2x - 3 > 0$ ($x^2 - 2x - 3 < 0$). Zatem:

- Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x - 3 > 0$ jest suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.
- Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x - 3 < 0$ jest przedział $(-1, 3)$.

Podczas rozwiązywania nierówności kwadratowej będziemy korzystać z wykresu odpowiedniej funkcji kwadratowej.

Zauważ, że współrzędne wierzchołka paraboli oraz punkt przecięcia wykresu z osią *OY* nie mają wpływu na zbiór rozwiązań nierówności.

Istotne jest położenie tego wykresu w stosunku do osi OX, w szczególności miejsca zerowe tej funkcji oraz to, czy parabola będąca wykresem funkcji ma ramiona skierowane do dołu czy do góry. Dlatego wystarczy naszkicować przybliżony wykres, uwzględniający miejsca zerowe i znak współczynnika przy x^2.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówności:

a) $-x^2+1<0$ b) $4x \geqslant x^2$

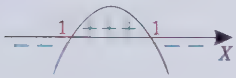
Ad a)

$-x^2+1<0$ Współczynnik przy x^2 jest równy -1.

$-(x^2-1)<0$ Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$-(x+1)(x-1)<0$ Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $f(x)=-x^2+1$.

$x_1=-1 \quad x_2=1$



Wykres funkcji ma ramiona skierowane do dołu $(-1<0)$. Szkicujemy przybliżony wykres funkcji.

$x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ Odczytujemy argumenty, dla których wartości funkcji są ujemne.

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Ad b)

$4x \geqslant x^2$ Nierówność doprowadzamy do postaci $ax^2+bx+c \geqslant 0$ $(a \neq 0)$.

$-x^2+4x \geqslant 0$

$-x(x-4) \geqslant 0$ Wyłączamy $-x$ poza nawias i odczytujemy miejsca zerowe funkcji $f(x)=-x^2+4x$.

$x_1=0 \quad x_2=4$ Współczynnik przy x^2 jest ujemny. Szkicujemy przybliżony wykres funkcji.

$x \in \langle 0, 4\rangle$ Odczytujemy argumenty, dla których wartości funkcji są nieujemne.

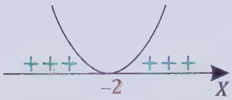
$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, 4\rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\langle 0, 4\rangle$.

Omówiliśmy przypadek nierówności kwadratowych prowadzących do analizowania wykresu funkcji $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ mającej dwa miejsca zerowe $\left(\Delta>0, \Delta=b^2-4ac\right)$.

Poniżej przeanalizujemy nierówności, w których rozpatruje się wykres funkcji kwadratowej mającej jedno miejsce zerowe $(\Delta=0)$. W tym celu naszkicujmy wykres funkcji $f(x)=x^2+4x+4$.

$f(x) = (x + 2)^2$



Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej (i iloczynowej).

$f(0) = 4$, $W(-2, 0)$, jedno miejsce zerowe: -2

Zauważamy, że:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

Funkcja f nie przyjmuje wartości ujemnych.

Na podstawie powyższego wykresu otrzymujemy:

- $x^2 + 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$
- $x^2 + 4x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}$
- $x^2 + 4x + 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = -2$
- Nierówność $x^2 + 4x + 4 < 0$ nie ma rozwiązań.

W ten sposób rozwiązaliśmy cztery możliwe nierówności.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówności:

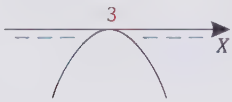
a) $-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$ b) $-x^2 - 8x - 16 < 0$

Ad a) $-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$

$x_0 = 3$

Obliczamy wyróżnik dla funkcji $y = -x^2 + 6x - 9$. Wyznaczamy miejsce zerowe.



Współczynnik przy x^2 jest ujemny. Szkicujemy przybliżony wykres funkcji.

Funkcja nie przyjmuje wartości dodatnich; wartość zero przyjmuje dla argumentu 3.

$-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x = 3$

Liczba 3 jest jedynym rozwiązaniem tej nierówności.

Ad b)

$-x^2 - 8x - 16 < 0 \quad /\cdot(-1)$

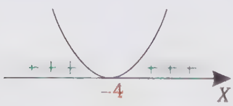
$x^2 + 8x + 16 > 0$

$(x + 4)^2 > 0$

$x_0 = -4$

Mnożymy nierówność stronami przez (-1). Rozpatrujemy funkcję $y = x^2 + 8x + 16$. Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia. Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji.

Współczynnik przy x^2 jest dodatni.



Funkcja $y = x^2 + 8x + 16$ przyjmuje wartość zero dla argumentu -4; dla pozostałych argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

$x^2 + 8x + 16 > 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - \{-4\}$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

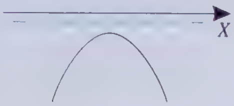
Na koniec pozostał przypadek, gdy wyróżnik obliczony dla funkcji kwadratowej, wykorzystanej do rozwiązania nierówności kwadratowej, jest ujemny.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówności:

a) $-x^2-1 \leqslant 0$ b) $5(x+1)^2 < 12x+4$

Ad a) Wiemy, że funkcja kwadratowa $y=-x^2-1$ nie ma miejsc zerowych ($\Delta < 0$); dla dowolnej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $-x^2-1$ jest ujemna (nie większa niż -1).



Wykres funkcji $y=-x^2-1$ położony jest pod osią OX.

Zbiorem rozwiązań nierówności $-x^2-1 \leqslant 0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

$-x^2-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Ad b) $5(x+1)^2 < 12x+4$

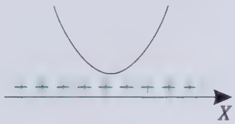
$5\left(x^2+2x+1\right)-12x-4<0$

$5x^2-2x+1<0$

$\Delta = 4-4\cdot 5\cdot 1=-16,\quad -16<0$

Nierówność doprowadzamy do postaci $ax^2+bx+c<0$ $(a \neq 0)$.

Obliczamy wyróżnik dla funkcji $y=5x^2-2x+1$.



Współczynnik przy x^2 jest dodatni. Szkicujemy przybliżony wykres funkcji.

Wykres położony jest nad osią OX.

Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla dowolnej liczby rzeczywistej.

Nie istnieje liczba rzeczywista, która spełniałaby nierówność. Nierówność jest sprzeczna.

UWAGA: Ujemny wyróżnik, rozważany podczas rozwiązywania nierówności kwadratowej, nie świadczy o tym, że zbiór rozwiązań nierówności jest pusty. Informuje nas jedynie o tym, że dana funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, a jej wykres w całości jest położony nad osią OX albo pod osią OX. Dlatego zawsze szkicujemy przybliżony wykres funkcji i na jego podstawie rozwiązujemy nierówność.

Sprawdź czy rozumiesz

1. Rozwiąż nierówności:

   a) $x^2>0$ b) $x^2<4$ c) $-x^2 \leqslant -9$ d) $7 \leqslant -x^2+8$

2. Rozwiąż nierówności:

   a) $0{,}2x^2+x>0$ b) $4x^2 \leqslant 8x$

   c) $21x^2+7<0$ d) $4(x^2+3x-5) \geqslant 12x-28$

Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego

W tym temacie omówimy równania oraz nierówności pierwiastkowe, których nie da się sprowadzić odpowiednio do równania kwadratowego oraz nierówności kwadratowej przez wprowadzenie zmiennej pomocniczej. Metoda rozwiązywania tego rodzaju równań (nierówności) polega na podnoszeniu stron równania (nierówności) do kwadratu. Należy jednak pamiętać, że otrzymane w ten sposób równanie (otrzymana nierówność) na ogół nie jest równoważne równaniu wyjściowemu (nie jest równoważna nierówności wyjściowej).
Przyjrzyjmy się bliżej tej metodzie rozwiązywania równań i nierówności.

I. Równania pierwiastkowe
Rozważmy równanie $\sqrt{x} = -x$, określone w zbiorze $\langle 0, +\infty)$. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba 0 (sprawdź!). Po podniesieniu stron równania do kwadratu otrzymujemy równanie

$x = x^2$, czyli $x^2 - x = 0$,

które ma dwa rozwiązania – są to liczby 0 oraz 1. Zatem równania

$\sqrt{x} = -x$ oraz $x^2 = x$

nie są równoważne. Dlaczego tak się dzieje? Spróbujemy odpowiedzieć na to pytanie.

Przeanalizujmy najpierw odpowiednie relacje pomiędzy liczbami rzeczywistymi. Z własności liczb wiemy, że

jeśli $a, b \in \boldsymbol{R}$, to $a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$,

czyli kwadraty dwóch liczb są równe wtedy i tylko wtedy, gdy liczby te są równe lub przeciwne.
Zauważmy, że:

- jeśli liczby a i b są liczbami różnymi od zera o przeciwnych znakach, to z faktu, że $a^2 = b^2$, nie wynika, że $a = b$,
- jeśli liczby a i b są liczbami o jednakowych znakach (obie nieujemne lub obie ujemne), to $a^2 = b^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Wyobraźmy sobie, że rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą określone w pewnym zbiorze D. Oznaczamy przez L – lewą stronę równania, zaś przez P – prawą stronę równania.
Jeśli strony równania L = P podniesiemy do kwadratu, to otrzymamy równanie $L^2 = P^2$, które ma nie tylko rozwiązania równania L = P, ale także rozwiązania równania L = –P. Rozwiązania równania L = –P nie są (poza przypadkiem L = –P = 0) rozwiązaniami równania wyjściowego i nazywamy je pierwiastkami obcymi. Pierwiastki obce możemy wyeliminować na dwa sposoby, w zależności od metody, którą zastosujemy do rozwiązania zadania.

A. metoda analizy starożytnych – polega na tym, że przekształcamy równanie w taki sposób, aby spełniało następujące warunki – otrzymane równanie było łatwiejsze do rozwiązania i wszystkie rozwiązania równania wyjściowego były też rozwiązaniami równania końcowego. Ewentualne pierwiastki obce, które mogą się pojawić, eliminujemy poprzez sprawdzenie – podstawiając kolejno każde z otrzymanych rozwiązań równania końcowego do równania wyjściowego. Sprawdzenie poprawności rozwiązania jest elementem koniecznym w rozwiązywaniu równań metodą analizy starożytnych.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{x^2+1} = 2x + 1$ metodą analizy starożytnych.

Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}$, ponieważ wyrażenie $x^2 + 1$ jest dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej. Aby „pozbyć się" pierwiastka kwadratowego, podniesiemy obie strony równania do kwadratu.

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = (2x+1)^2$$

Po prawej stronie równania stosujemy wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń:

$$x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3x^2 + 4x = 0, \text{ skąd } x(3x+4) = 0, \text{ zatem}$$

$$x = 0 \lor x = -1\frac{1}{3}$$

Równanie końcowe ma dwa rozwiązania. Należy teraz sprawdzić, czy są to także rozwiązania równania wyjściowego.

Sprawdzenie:

- jeśli $x = 0$, to mamy: $L = \sqrt{0^2+1} = \sqrt{1} = 1 \quad P = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \quad L = P$
- jeśli $x = -1\frac{1}{3}$, to mamy: $L = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

$$P = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{3} + 1 = -2\frac{2}{3} + 1 = -1\frac{2}{3}$$

$$L \neq P$$

Rozwiązaniem równania $\sqrt{x^2+1} = 2x + 1$ jest liczba 0.

B. metoda równań równoważnych – polega na tym, że równanie wyjściowe przekształcamy w taki sposób, aby każde kolejno otrzymane równanie miało taki sam zbiór rozwiązań jak równanie bezpośrednio je poprzedzające (dbamy o to, aby pierwiastki obce nie pojawiały się podczas kolejnych etapów rozwiązania).

Z wcześniejszych rozważań wynika, że:

- jeśli strony równania $L = P$ określonego w zbiorze D mają identyczne znaki (obie strony są ujemne lub obie strony są nieujemne) w pewnym podzbiorze D_1, gdzie $D_1 \subseteq D$, to równanie $L = P$ jest równoważne równaniu $L^2 = P^2$ w zbiorze D_1;
- jeśli strony równania $L = P$ określonego w zbiorze D mają znaki przeciwne w pewnym podzbiorze D_2, gdzie $D_2 \subseteq D$ oraz $D_1 \cup D_2 = D$, to równanie $L = P$ jest sprzeczne w zbiorze D_2.

Z tego faktu korzystamy, stosując metodę równań równoważnych.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{x^2+1} = 2x + 1$ metodą równań równoważnych.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Przeanalizujmy znaki stron równania.
Lewa strona równania jest dodatnia (z definicji pierwiastka kwadratowego), prawa zaś przyjmuje w zbiorze $\boldsymbol{R}$ zarówno wartości dodatnie, jak niedodatnie. Rozważymy więc dwa przypadki ze względu na wartość wyrażenia $2x + 1$.

I przypadek
Jeśli $2x + 1 \leqslant 0$, to strony równania $\sqrt{x^2+1} = 2x + 1$ mają przeciwne znaki (lub lewa strona jest dodatnia, a prawa równa zero), zatem – w zbiorze $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$ – równanie to jest sprzeczne.

II przypadek
Jeśli $2x + 1 > 0$, to obie strony równania są dodatnie. Po podniesieniu stron równania $\sqrt{x^2+1} = 2x + 1$ do kwadratu otrzymamy równanie równoważne danemu w zbiorze $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Mamy:

$$x^2 + 1 = (2x + 1)^2, \text{ gdzie } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$3x^2 + 4x = 0, \text{ stąd } x = 0 \lor x = -1\frac{1}{3}, \text{ zatem}$$

$$\left(x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \land \left(x = 0 \lor x = -1\frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow x = 0$$

Sumujemy zbiory rozwiązań otrzymane w obu przypadkach.
Rozwiązaniem równania $\sqrt{x^2+1} = 2x + 1$ jest liczba 0.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$ metodą równań równoważnych.

Najpierw wyznaczymy dziedzinę równania:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ 3x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \geqslant \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle 1, +\infty)$$

Zatem

$$D = \langle 1, +\infty)$$

Równanie przekształcimy równoważnie do postaci:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

Ponieważ obie strony równania są dodatnie, możemy podnieść je do kwadratu, otrzymując równanie równoważne danemu.

$\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}\right)^2=3^2$, stąd

$3x-2+2\sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{x-1}+x-1=9$, czyli

$2\sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{x-1}=12-4x \quad /:2$

$\sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{x-1}=6-2x$

Zauważmy, że w zbiorze $\langle 1, +\infty)$ lewa strona równania jest nieujemna, a prawa przyjmuje wartości nieujemne, jeśli $x \in \langle 1, 3\rangle$, oraz ujemne, jeśli $x \in (3, +\infty)$.

Rozważymy zatem dwa przypadki ze względu na znak wyrażenia $6-2x$.

1.

$$\begin{cases} x \in \langle 1, 3\rangle \\ \sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{x-1}=6-2x \end{cases}$$

Ponieważ dla każdego $x \in \langle 1, 3\rangle$ obie strony równania są nieujemne, możemy podnieść je do kwadratu, otrzymując równanie równoważne danemu. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} x \in \langle 1, 3\rangle \\ (3x-2)(x-1)=(6-2x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle 1, 3\rangle \\ 3x^2-5x+2=36-24x+4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle 1, 3\rangle \\ x^2-19x+34=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle 1, 3\rangle \\ x=2 \ \vee \ x=17, \end{cases}$$

stąd $x=2$.

$\vee$

2.

$$\begin{cases} x \in (3, +\infty) \\ \sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{x-1}=6-2x \end{cases}$$

W tym przypadku równanie jest sprzeczne ($L > 0$, $P < 0$). Zatem zbiór rozwiązań równania jest pusty.

Równanie ma jedno rozwiązanie. Jest nim liczba 2.

Spróbuj rozwiązać to równanie (łatwiejszą!) metodą analizy starożytnych.

<u>II. Nierówności pierwiastkowe</u>

Rozważmy nierówność $\sqrt{x^2} \leqslant x$. Zbiorem rozwiązań tej nierówności, czyli nierówności $|x| \leqslant x$ jest przedział $\langle 0, +\infty)$ (sprawdź!). Po podniesieniu stron nierówności $\sqrt{x^2} \leqslant x$ do kwadratu otrzymujemy nierówność $x^2 \leqslant x^2$, której zbiorem rozwiązań jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Zatem nierówności $\sqrt{x^2} \leqslant x$ oraz $x^2 \leqslant x^2$ nie są równoważne.

Nierówności pierwiastkowe (podobnie jak inne nierówności) rozwiązujemy metodą nierówności równoważnych.

Zanim rozwiążemy nierówności, przyjrzyjmy się relacjom zachodzącym między liczbami rzeczywistymi a kwadratami tych liczb.

Niech $a, b \in \boldsymbol{R}$. Wówczas:

- Jeśli a i b są liczbami nieujemnymi, to $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.
- Jeśli a i b są liczbami ujemnymi, to $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2$.
- Jeśli a i b są przeciwnych znaków, wówczas, jeśli $a < b$, to nierówność $a \leqslant b$ jest prawdziwa, zaś jeśli $a > b$, to nierówność $a \leqslant b$ jest fałszywa.

Rozwiązując nierówności pierwiastkowe, stosujemy powyższą własność. Obie strony nierówności możemy podnieść do kwadratu tylko wtedy, gdy mamy pewność, że obie są nieujemne albo obie ujemne, przy czym:

– jeśli obie strony nierówności są nieujemne, to po podniesieniu stron do kwadratu znak nierówności pozostawiamy bez zmiany;
– jeśli obie strony nierówności są ujemne, to po podniesieniu stron do kwadratu znak nierówności zmieniamy na przeciwny.

Przykład 4.

Rozwiążemy nierówność $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

Wyznaczamy dziedzinę nierówności:

$$(x+2)(x-5) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty)$$

Zatem

$$D = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty)$$

Zauważmy, że dla każdego $x \in D$ lewa strona nierówności jest nieujemna; prawa zaś przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak ujemne. Rozważamy dwa przypadki.

<u>I przypadek</u>

$$\begin{cases} 8-x \geqslant 0 \\ x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 8 \\ x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle$$

Jeśli $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle$, to obie strony nierówności są nieujemne i po podniesieniu stron nierówności do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną danej. Mamy:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ (x+2)(x-5) < (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ 13x < 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, 8\rangle \\ x < 5\frac{9}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\rangle \cup \left\langle 5, 5\frac{9}{13}\right)$$

<u>II przypadek</u>

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \\ 8-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, +\infty) \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (8, +\infty)$$

Jeśli $x \in (8, +\infty)$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, zaś prawa strona nierówności jest ujemna, więc nierówność jest sprzeczna (liczba nieujemna nie może być mniejsza od ujemnej).
Zatem, jeśli $x \in (8, +\infty)$, to nierówność jest sprzeczna.
Ostatecznie zbiorem rozwiązań nierówności $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$ jest zbiór $(-\infty, -2\rangle \cup \left\langle 5, 5\frac{9}{13}\right)$.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność $\sqrt{x+3} \geqslant 9 - x$.

Dziedziną nierówności jest przedział $\langle -3, +\infty)$.

Rozważymy dwa przypadki ze względu na znak wyrażenia $9 - x$.

I przypadek

$$\begin{cases} x \in \langle -3, 9\rangle \\ \sqrt{x+3} \geqslant 9 - x \end{cases}$$

Obie strony nierówności są nieujemne, więc po podniesieniu ich do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną danej.

$$\begin{cases} x \in \langle -3, 9\rangle \\ x + 3 \geqslant 81 - 18x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle -3, 9\rangle \\ x^2 - 19x + 78 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle -3, 9\rangle \\ (x-6)(x-13) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \langle -3, 9\rangle \\ x \in \langle 6, 13\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \langle 6, 9\rangle$$

$\vee$

II przypadek

$$\begin{cases} x \in (9, +\infty) \\ \sqrt{x+3} \geqslant 9 - x \end{cases}$$

Prawa strona nierówności jest ujemna, lewa strona jest nieujemna. Nierówność jest tożsamościowa w zbiorze $(9, +\infty)$.

Sumujemy zbiory rozwiązań otrzymane w obu przypadkach:

$$\langle 6, 9\rangle \cup (9, +\infty) = \langle 6, +\infty)$$

Ostatecznie zbiorem rozwiązań nierówności $\sqrt{x+3} \geqslant 9 - x$ jest przedział $\langle 6, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:
   a) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$
   b) $\sqrt{2x-7} \cdot \sqrt{x-4} = x - 2$
2. Rozwiąż nierówności:
   a) $\sqrt{2x+7} < x - 4$
   b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} < 2$

Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

Przykład 1.

Dwa lata temu pani Alicja Nowak założyła dwuletnią lokatę, wpłacając do banku 20 000 zł. Kapitalizacja odsetek następowała po każdym roku oszczędzania. Jakie było roczne oprocentowanie tej lokaty, jeżeli pani Alicja po dwóch latach oszczędzania ma na tej lokacie, wraz z odsetkami, 24 200 zł?

Analiza:

x – oprocentowanie roczne lokaty, wyrażone w ułamku dziesiętnym, $x \in (0, 1)$

$20000 + x \cdot 20\,000 = (1 + x) \cdot 20\,000$ – kwota (w zł), jaką pani Alicja miała na lokacie po roku oszczędzania

$(1+x) \cdot 20\,000 + x \cdot [(1+x) \cdot 20\,000] = (1 + x) \cdot 20\,000 \cdot (1 + x)$ – kwota (w zł), jaką pani Alicja ma na lokacie po dwóch latach oszczędzania

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$(1 + x)^2 \cdot 20\,000 = 24\,200 \quad / : 20\,000$$
$$(1 + x)^2 = 1{,}21$$
$$1 + x = 1{,}1 \ \vee \ 1 + x = -1{,}1$$
$$x = 0{,}1 \ \vee \ x = -2{,}1$$

Liczba $-2{,}1$ nie spełnia założenia $x \in (0, 1)$ $\big(-2{,}1 \notin (0, 1)\big)$.

Sprawdzenie:

Roczne oprocentowanie lokaty wynosi 10%. Po roku oszczędzania na lokacie znajdowało się 22 000 zł. Po drugim roku bank dopisał $0{,}1 \cdot 22000 = 2200$ (zł) odsetek. Na lokacie znajduje się obecnie kwota $22\,000 + 2200 = 24\,200$ (zł).

Odpowiedź:

Oprocentowanie lokaty wynosiło 10% w stosunku rocznym.

Przykład 2.

W zakładzie pracy pana Grzegorza zależność przychodów ze sprzedaży od wielkości dziennej produkcji wyraża wzór $p(n) = 150n$, gdzie n oznacza liczbę sztuk wyprodukowanego towaru. Koszty produkcji, w złotych, określa zależność

$$k(n) = n^2 + 50n + 1600$$

a) Napiszemy wzór funkcji $z(n)$ – zależności zysku zakładu od wielkości dziennej produkcji, jeśli zysk jest różnicą między przychodem zakładu a kosztami produkcji. Następnie obliczymy, jaka wielkość produkcji nie powoduje strat finansowych zakładu.

b) Jaka wielkość dziennej produkcji zapewnia największy zysk? Jaki jest koszt produkcji, gdy zysk jest największy?

Ad a) Analiza:

Określamy wzór funkcji zysku:

$z(n) = p(n) - k(n)$, więc

$z(n) = -n^2 + 100n - 1600$

Aby zakład nie ponosił strat finansowych, zysk musi być nieujemny.

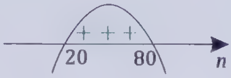
Ułożenie i rozwiązanie nierówności:

$-n^2 + 100n - 1600 \geqslant 0$

$\Delta = 3600 \quad \sqrt{\Delta} = 60$

$n_1 = 80$ i $n_2 = 20$

$\left(n \in \langle 20, 80\rangle \wedge n \in N\right) \Leftrightarrow n \in \{20, 21, ..., 79, 80\}$



Odpowiedź:

Aby zakład nie ponosił strat, powinien wyprodukować – w ciągu dnia – co najmniej 20 sztuk i co najwyżej 80 sztuk towaru.

Ad b) Aby obliczyć, jaka wielkość produkcji zapewnia największy zysk, wystarczy wyznaczyć argument, dla którego funkcja

$z(n) = -n^2 + 100n - 1600$

przyjmuje największą wartość w zbiorze

$Z = \{20, 21, ..., 80\}$

Mamy:

$$n_w = \frac{-100}{-2} = 50$$

Liczba 50 jest elementem zbioru Z. Obliczmy koszt produkcji dla 50 sztuk towaru:

$k(50) = 50^2 + 50 \cdot 50 + 1600 = 6600$

Odpowiedź:

Największy zysk zapewnia dzienna produkcja 50 sztuk towaru. Wówczas koszt produkcji wynosi 6600 zł.

Przykład 3.

Odcinek jednostkowy AB podzielono na dwie części w ten sposób, że stosunek krótszej części tego odcinka do dłuższej jest równy stosunkowi dłuższej części do długości całego odcinka. Obliczymy długość każdej części oraz stosunek podziału.

Analiza:

Przyjmijmy oznaczenia:

$|AB| = 1$, $C \in AB$

$|AC| = 1 - x$, $|CB| = x$

Niech $|CB| < |AC|$, więc $0 < x < \frac{1}{2}$.

Ułożenie i rozwiązanie równania:

Z treści zadania wiadomo, że:

$$\frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$$

Z własności proporcji otrzymujemy:

$(1-x)^2=x$, stąd $1-2x+x^2=x$, czyli

$x^2-3x+1=0$

$\Delta=5 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

$x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\text{rozwiązanie } x_2 \text{ nie spełnia założenia } x<\dfrac{1}{2}\right)$

Zatem $|CB|=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ i $|AC|=1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2-3+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Stosunek podziału jest równy:

$$\frac{|CB|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Sprawdzenie:

Obliczymy długość odcinka AB, znając długości kawałków.

$|AC|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $|CB|=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, zatem

$|AC|+|CB|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=1=|AB|$

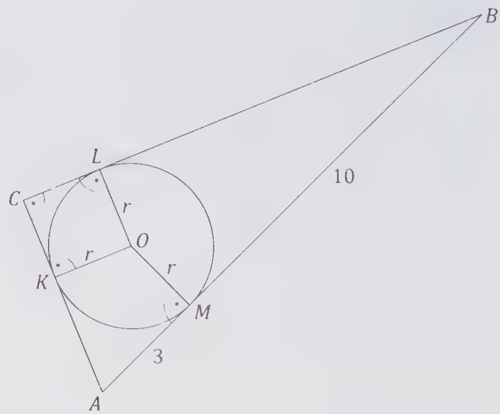
Odpowiedź:

Odcinek jednostkowy podzielono na odcinki długości $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (dłuższy) i $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (krótszy).

Stosunek podziału wynosi $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Przykład 4.

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. W trójkąt ten wpisano okrąg. Oblicz promień okręgu, jeśli wiadomo, że punkt styczności M okręgu z przeciwprostokątną AB podzielił ją na dwa odcinki o długościach $|MB|=10$ i $|MA|=3$.



Analiza:

Przyjmijmy oznaczenia:

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC, $r>0$

K, L – punkty styczności okręgu z bokami odpowiednio AC i AB

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wiadomo, że $|AM| = |AK|$ oraz $|MB| = |LB|$, więc $|AK| = 3$ i $|BL| = 10$. Czworokąt $KOLC$ jest kwadratem o boku r, zatem $|AC| = 3 + r$ oraz $|BC| = 10 + r$. Z treści zadania wiemy, że $|AB| = 13$.

Ułożenie i rozwiązanie równania:
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$
$$(3 + r)^2 + (10 + r)^2 = 13^2$$
$$9 + 6r + r^2 + 100 + 20r + r^2 = 169$$
$$r^2 + 13r - 30 = 0$$
$$\Delta = 289,\ \sqrt{\Delta} = 17$$
$$r = -15 \ \vee \ r = 2$$

Liczba -15 nie spełnia warunku $r > 0$. Zatem $r = 2$.

Sprawdzenie:
Sprawdzenie poprawności rozwiązania zadania możemy wykonać, korzystając ze znanego Ci wzoru na promień okręgu wpisanego w dowolny trójkąt $r = \frac{P}{p}$, gdzie P oznacza pole trójkąta, zaś p – połowę obwodu trójkąta.
Z naszych obliczeń wynika, że długości przyprostokątnych wynoszą: $|AC| = 5$, $|BC| = 12$, $P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC|$, więc $P = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$, zaś $p = \frac{|AC| + |BC| + |AB|}{2}$, czyli $p = \frac{5 + 12 + 13}{2} = 15$.
Zatem $r = \frac{P}{p}$, czyli $r = \frac{30}{15} = 2$.

Odpowiedź:
Promień okręgu wpisanego w trójkąt wynosi 2.

Przykład 5.

Z punktu A leżącego w odległości od środka okręgu O o 1 większej niż promień poprowadzono dwie sieczne p i s. Sieczna p przecięła okrąg w punktach N i M tak, że $|AN| = 2{,}5$, zaś $|NM| = 3{,}9$. Sieczna s przecięła okrąg w punktach K i L, gdzie $|KL| = 6$. Obliczymy długość odcinka AL oraz promień tego okręgu.

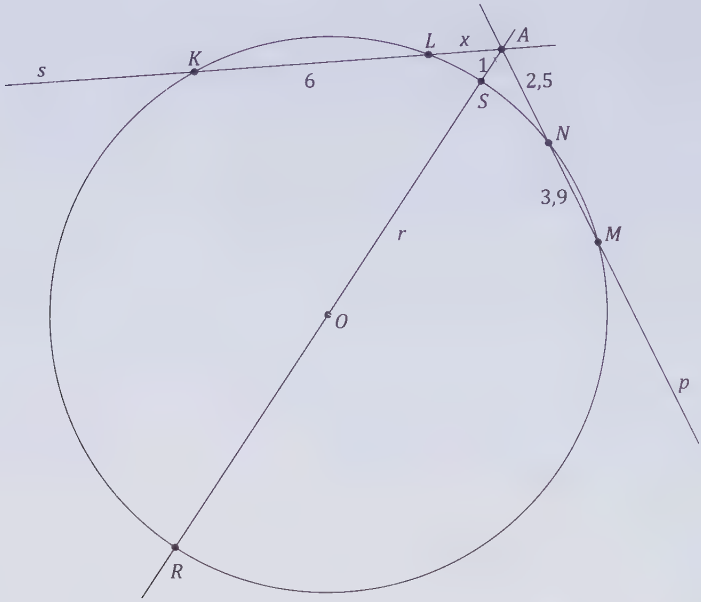
Analiza:
Przyjmijmy oznaczenia:

$|LA| = x$, $x > 0$

R, S – punkty wspólne okręgu i siecznej poprowadzonej przez punkt A i środek O okręgu

$|OS| = |OR| = r$, $r > 0$

$|SA| = 1$



Do obliczenia długości odcinków AL oraz OS zastosujemy twierdzenie o siecznych.

Ułożenie i rozwiązanie równania:
Z twierdzenia o siecznych p i r otrzymujemy:

$$|AL| \cdot |AK| = |AN| \cdot |AM|$$
$$x \cdot (x+6) = 2{,}5 \cdot (2{,}5 + 3{,}9)$$
$$x^2 + 6x = 2{,}5 \cdot 6{,}4$$
$$x^2 + 6x = 16$$
$$x^2 + 6x - 16 = 0$$
$$(x+8)(x-2) = 0$$
$$x_1 = -8,\ x_2 = 2$$

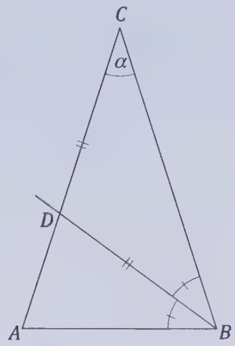
Rozwiązanie x_1 nie spełnia warunków zadania. Zatem $|AL| = 2$.
Stosujemy jeszcze raz twierdzenie o siecznych, dla siecznych AR i p. Otrzymujemy:

$$|AS| \cdot |AR| = |AN| \cdot |AM|$$
$$1 \cdot (1 + 2r) = 16$$
$$1 + 2r = 16$$
$$r = 7{,}5$$

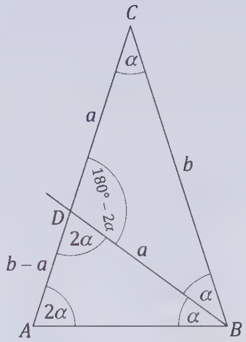
Sprawdzenie:
Z naszych obliczeń wynika, że $|AL| = 2$, $|AK| = |AL| + |LK| = 2 + 6 = 8$, $|AS| = 1$, $|AR| = |SA| + |SR| = 1 + 2 \cdot 7{,}5 = 16$. Zatem:
$|AL| \cdot |AK| = 2 \cdot 8 = 16$, $|AS| \cdot |AR| = 1 \cdot 16 = 16$, $|AN| \cdot |AM| = 2{,}5 \cdot 6{,}4 = 16$. Stąd $|AL| \cdot |AK| = |AS| \cdot |AR| = |AN| \cdot |AM|$ (równość prawdziwa na podstawie twierdzenia o siecznych).

Odpowiedź:
Promień okręgu wynosi 7,5, zaś długość odcinka AL jest równa 2.

Przykład 6.



W trójkącie równoramiennym ABC kąt między ramionami AC i BC ma miarę α. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie D. Wiedząc, że $|BD| = |DC|$, wykażemy, że
$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



Założenie:

ΔABC – trójkąt równoramienny; $|\sphericalangle ACB| = \alpha$

$BD^{\rightarrow}$ – dwusieczna kąta ABC, $D \in AC$

$|BD| = |DC| = a, \ a > 0$

$|AC| = |BC| = b, \ b > 0$

$|AD| = b - a$, gdzie $0 < a < b$

Teza:
$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Dowód:

Najpierw wykażemy podobieństwo trójkątów DAB i ABC, na podstawie cechy kkk.

- ΔBDC jest równoramienny, bo z założenia $|BD| = |DC|$, więc $|\sphericalangle DBC| = \alpha$. Z własności sumy miar kątów w trójkącie wnioskujemy, że
  $$|\sphericalangle BDC| = 180° - 2\alpha$$
- $BD^{\rightarrow}$ to dwusieczna kąta ABC, więc $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DBA|$, czyli
  $$|\sphericalangle DBA| = \alpha$$
- Z własności kątów przyległych $|\sphericalangle BDA| = 180° - |\sphericalangle BDC|$, skąd
  $$|\sphericalangle BDA| = 2\alpha$$
- Z założenia $|AC| = |BC|$, więc $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABC| = 2\alpha$, czyli
  $$|\sphericalangle BAD| = 2\alpha$$

Tak więc ΔABD jest równoramienny i $|AB| = |BD| = a$.

Ponieważ $\Delta DAB \sim \Delta ABC$, więc długości odpowiednich boków są proporcjonalne. Mamy
$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \text{ czyli}$$
$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b}$$

Dalszą część dowodu przeprowadzimy na dwa sposoby.

I sposób

Otrzymaną równość przekształcimy równoważnie:

$$\frac{b-a}{a}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a}-1=\frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a}-\frac{a}{b}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}-\frac{1}{\frac{b}{a}}-1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)-1=0$$

Wprowadzimy oznaczenie: $\frac{b}{a}=x$, gdzie $\frac{b}{a}>1$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe.

$$x^2-x-1=0$$

$$\Delta=5, \sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$$

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Pierwsze rozwiązanie nie spełnia założenia $(x>0)$.

Otrzymaliśmy:

$$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-1=x-1, \quad \text{stąd}$$

$$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \text{co kończy dowód.}$$

II sposób

Z podobieństwa trójkątów ABD i ABC otrzymaliśmy zależność $\frac{b-a}{a}=\frac{a}{b}$.

Korzystając z własności proporcji, mamy

$$b^2-ab=a^2$$

$$b^2-ab-a^2=0$$

Otrzymane równanie możemy potraktować jako równanie kwadratowe z niewiadomą b (wówczas „a" traktujemy jako stałą).

$$b^2-ab-a^2=0$$

$$\Delta=(-a)^2-4\cdot 1\cdot(-a^2)=a^2+4a^2=5a^2$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2}=\sqrt{5}\cdot|a|=\sqrt{5}a, \text{ bo } a>0$$

$$b_1=\frac{a-\sqrt{5}a}{2}=\frac{a\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}<0 \text{ – nie spełnia założenia } (b>0)$$

$$b_2=\frac{a+\sqrt{5}a}{2}=\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

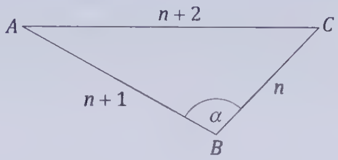
Zatem $b=\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$, czyli $\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, stąd

$$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \text{co kończy dowód.}$$

Przykład 7.

Wykażemy, że istnieje tylko jeden trójkąt rozwartokątny, w którym długości boków wyrażają się kolejnymi liczbami naturalnymi.

Założenie:
ΔABC – trójkąt rozwartokątny, $|\sphericalangle ABC| = \alpha$,
$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$
$|BC| = n$, $|AB| = n+1$, $|AC| = n+2$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$



Teza:
istnieje tylko jeden trójkąt spełniający założenie

Dowód: Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC mamy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\alpha, \quad \text{więc}$$

$$\cos\alpha = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|}$$

Ale z założenia kąt ABC jest rozwarty, więc $\cos\alpha < 0$, czyli

$$\frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|} < 0$$

Obie strony nierówności mnożymy przez $2 \cdot |AB| \cdot |BC|$ (wyrażenie dodatnie, bo $|AB| > 0$ i $|BC| > 0$) i otrzymujemy nierówność równoważną danej:

$$|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 < 0, \quad \text{stąd} \quad (n+1)^2 + n^2 - (n+2)^2 < 0, \text{ czyli}$$

$$n^2 - 2n - 3 < 0$$

$$[n \in (-1, 3) \wedge n \in \boldsymbol{N}_+] \Leftrightarrow (n = 1 \vee n = 2)$$

Jeśli $n = 1$, to długości odcinków wynoszą: 1, 2 oraz 3; nie spełniają one nierówności trójkąta!
Jeśli $n = 2$, to mamy: $|BC| = 2$, $|AB| = 3$, $|AC| = 4$.
Istnieje więc tylko jeden trójkąt spełniający warunki zadania, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Telewizor plazmowy kosztował 8000 zł. Po dwukrotnej obniżce ceny o ten sam procent jego cena wynosiła 7220 zł. Oblicz, o ile procent obniżano cenę telewizora za każdym razem.
2. Ile co najmniej osób brało udział w przyjęciu, jeśli każdy z każdym przywitał się uściskiem dłoni, a tych uścisków było co najmniej 120?
3. Janek wziął udział w turnieju tenisowym, podczas którego każdy z uczestników rozegrał z każdym po trzy mecze. Łącznie rozegrano więcej niż 45 meczy. Ile co najmniej osób brało udział w turnieju tenisowym? Ile co najmniej meczy rozegrał Janek?
4. Długości boków pewnego trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi dodatnimi. Cosinus kąta leżącego pomiędzy dłuższymi bokami jest równy 0,75. Wyznacz długości boków tego trójkąta i oblicz jego pole.

Wzory Viète'a

Wiesz, że funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ma miejsce zerowe tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$. Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe x_0, gdzie $x_0 = -\frac{b}{2a}$; jeśli natomiast $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2, gdzie $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Rozważmy funkcję kwadratową $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, o której wiadomo, że $\Delta > 0$. Obliczymy sumę i iloczyn jej miejsc zerowych. Otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Na tej podstawie możemy sformułować twierdzenie zwane twierdzeniem Viète'a.

Twierdzenie 1.

Jeśli x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, to zachodzą związki:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Jeśli x_0 jest jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, to

$$2x_0 = \frac{-b}{a}$$

$$x_0^2 = \frac{c}{a}$$

Powyższe wzory noszą nazwę wzorów Viète'a.

François Viète [fransua wjet] to francuski matematyk i prawnik z XVI w. Zajmował się algebrą, trygonometrią, geometrią. Największym jego osiągnięciem było zastosowanie liter do oznaczania wielkości algebraicznych. Wprowadzenie nowych oznaczeń w istotny sposób przyczyniło się do szybkiego rozwoju algebry. Viète udoskonalił też metody rozwiązywania równań. Interesował się również zagadnieniami związanymi z szyfrowaniem tekstów.

Poniższe przykłady ilustrują zastosowanie wzorów Viète'a.

A) Ustalanie znaków miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Przykład 1.

Bez obliczania miejsc zerowych funkcji kwadratowej ustalimy, jakie znaki mają te miejsca zerowe, jeśli:

a) $y=-\sqrt{2}x^2-4\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$ b) $y=2x^2+\sqrt{5}x-4$ c) $y=\frac{1}{2}x^2-8x+30$

Ad a) Wyróżnik funkcji kwadratowej $y=-\sqrt{2}x^2-4\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$ jest dodatni ($\Delta=8$), więc funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, przy czym:

$$x_1 \cdot x_2=\frac{-3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=3$$

$$x_1+x_2=\frac{-\left(-4\sqrt{2}\right)}{-\sqrt{2}}=-4$$

Iloczyn $x_1 \cdot x_2$ jest dodatni, więc miejsca zerowe funkcji mają jednakowe znaki (oba są ujemne albo oba dodatnie). Suma x_1+x_2 jest ujemna, więc wykluczona jest sytuacja, w której oba miejsca zerowe są dodatnie. Ostatecznie możemy wnioskować, że miejsca zerowe funkcji $y=-\sqrt{2}x^2-4\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$ są liczbami ujemnymi.

Ad b) Wyróżnik funkcji kwadratowej $y=2x^2+\sqrt{5}x-4$ jest dodatni ($\Delta=37$), więc funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2. Korzystając ze wzorów Viète'a, obliczamy iloczyn miejsc zerowych:

$$x_1 \cdot x_2=\frac{-4}{2}=-2$$

Iloczyn jest ujemny, więc miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y=2x^2+\sqrt{5}x-4$ mają różne znaki.

Ad c) W przypadku funkcji kwadratowej $y=\frac{1}{2}x^2-8x+30$ mamy: $\Delta=4$, $x_1 \cdot x_2=60$ i $x_1+x_2=16$. Iloczyn $x_1 \cdot x_2$ jest dodatni, więc miejsca zerowe mają jednakowe znaki. Suma x_1+x_2 również jest dodatnia, więc wnioskujemy, że miejsca zerowe funkcji $y=\frac{1}{2}x^2-8x+30$ są liczbami dodatnimi.

B) Ustalanie znaków współczynników we wzorze funkcji kwadratowej na podstawie informacji o znakach miejsc zerowych

Przykład 2.

Określimy znaki współczynników we wzorze funkcji $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$ i $\Delta>0$, jeśli wiadomo, że oba miejsca zerowe funkcji są dodatnie oraz wykres funkcji f ma z osią OY punkt wspólny $(0,-3)$.

Niech x_1, x_2 będą miejscami zerowymi funkcji f. Z treści zadania wiemy, że $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$. Korzystając ze wzorów Viète'a, warunek ten możemy zastąpić warunkiem mu równoważnym:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} \dfrac{-b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} \dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Ponadto wykres funkcji f ma z osią OY punkt wspólny $(0, -3)$, czyli $f(0) = -3$, skąd $c = -3$.
Teraz możemy przystąpić do ustalenia znaków współczynników a oraz b.
Skoro $c < 0$ i $\frac{c}{a} > 0$, wnioskujemy, że $a < 0$. Skoro $a < 0$ i $\frac{b}{a} < 0$, otrzymujemy $b > 0$.
Znaki współczynników a, b, c we wzorze funkcji f są następujące: $a < 0, b > 0, c < 0$.

C) Obliczanie wartości wyrażeń, w których występują miejsca zerowe funkcji kwadratowej, bez obliczania tych miejsc zerowych

Przykład 3.

Wiedząc, że x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$ $(\Delta > 0)$, obliczymy wartości wyrażeń: a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $|x_1 - x_2|$.

Wyrażenia, których wartości mamy obliczyć, przekształcimy tak, aby skorzystać ze wzorów Viète'a. W tym przypadku: $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$ i $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Ad a) Zauważ, że $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Stąd

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

Wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$ jest równa 10.
Ad b) Z własności wartości bezwzględnej wiemy, że $\sqrt{x^2} = |x|$. Zatem:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} =$$
$$= \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2} =$$
$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

Stąd $|x_1 - x_2| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1} = \sqrt{12 - 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Wartość wyrażenia $|x_1 - x_2|$ jest równa $2\sqrt{2}$.

D) Ustalanie wartości współczynników we wzorze funkcji kwadratowej na podstawie wartości wyrażeń, które zawierają miejsca zerowe funkcji

Przykład 4.

Wyznaczymy współczynniki b oraz c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że jej miejsca zerowe x_1, x_2 spełniają warunek:

$$x_1 + x_2 = 5 \quad \text{i} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2{,}5, \text{ gdzie } x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0.$$

Najpierw przekształcimy wyrażenie $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ tak, aby otrzymać sumę i iloczyn miejsc zerowych funkcji *f*. Mamy:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2}{x_1x_2}+\frac{x_1}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}$$

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ \dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=2{,}5 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1\cdot x_2=2 \end{cases}$$

Ze wzorów Viète'a wiemy, że $x_1+x_2=-b$ i $x_1\cdot x_2=c$, więc $b=-5$ oraz $c=2$.

E) Obliczanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej bez stosowania wzorów na miejsca zerowe

Przykład 5.

Obliczymy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-px-15$, jeśli wiadomo, że są one liczbami całkowitymi i parametr *p* jest liczbą pierwszą.

Zauważymy najpierw, że $\Delta=p^2+60$. Zatem $\Delta>0$ dla dowolnej liczby *p*, czyli funkcja *f* ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2. Ze wzorów Viète'a mamy:

$$x_1+x_2=p \quad \text{i} \quad x_1\cdot x_2=-15.$$

Z założenia wiemy, że $x_1\in \boldsymbol{C}$ i $x_2\in \boldsymbol{C}$. Wobec tego na podstawie równości $x_1\cdot x_2=-15$ możemy wnioskować, że istnieją tylko cztery pary liczb spełniające ten warunek:

–1 i 15 lub 1 i –15, lub –3 i 5, lub 3 i –5.

Ale $x_1+x_2=p$, gdzie *p* jest liczbą pierwszą, więc tylko para –3 i 5 spełnia warunek (sprawdź!).

Funkcja *f* ma dwa miejsca zerowe –3 oraz 5. Parametr *p* jest równy 2.

Znajomość wzorów Viète'a ułatwia rozwiązywanie wielu zadań. Do wzorów tych wrócimy w kolejnych tematach.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Nie obliczając miejsc zerowych funkcji kwadratowej, ustal ich znaki, jeśli:
   a) $y=3x^2+3x-6$ b) $y=-2x^2-14x-24$ c) $y=-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{10}x-4$.
2. Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, posługując się wzorami Viète'a, jeśli:
   a) $y=x^2+2x-3$ b) $y=x^2+15x+50$ c) $y=x^2-11x+24$.
3. Oblicz sumę kwadratów odwrotności miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y=\sqrt{3}x^2-4\sqrt{2}x+\sqrt{3}$.

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych z parametrem omówimy na przykładach.

Przykład 1.

Określimy liczbę rozwiązań równania $(m-2)x^2+\sqrt{5}x+m=0$ ze względu na wartość parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$).

Rozważymy dwa przypadki.

I przypadek
Jeśli współczynnik przy x^2 jest równy zeru, czyli wtedy, gdy $m = 2$, to rozważane równanie liniowe jest postaci $\sqrt{5}x+2=0$. Równanie to ma jedno rozwiązanie (jakie?).

II przypadek
Jeśli $m \neq 2$, czyli $m \in \boldsymbol{R} - \{2\}$, to równanie $(m-2)x^2+\sqrt{5}x+m=0$ jest równaniem kwadratowym. Wówczas liczba jego rozwiązań zależy od wyróżnika. Obliczamy wyróżnik i otrzymujemy:

$$\Delta = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot (m-2) \cdot m = -4m^2+8m+5 = -4\left(m-2\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) \text{ (sprawdź).}$$

Zatem:

- równanie nie ma rozwiązań wtedy, gdy:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\left(m-2\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) < 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

- równanie ma jedno rozwiązanie wtedy, gdy:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\left(m-2\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left\{-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\}$$

- równanie ma dwa rozwiązania wtedy, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\left(m-2\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right) \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup \left(2, 2\frac{1}{2}\right)$$

Ostatecznie dyskusja nad liczbą rozwiązań równania prowadzi nas do następującego wniosku.
Równanie $(m-2)x^2+\sqrt{5}x+m=0$:

- nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}\right\}$
- ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup \left(2, 2\frac{1}{2}\right)$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), dla których równanie $-0{,}5x^2+2x+m^2-3m=0$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

<u>I sposób</u> – skorzystamy ze wzorów Viète'a.
Rozważane równanie jest równaniem kwadratowym (współczynnik przy x^2 jest różny od zera) i ma dwa rozwiązania x_1 oraz x_2 wtedy, gdy $\Delta > 0$. Rozwiązania te są przeciwnych znaków wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest ujemny, czyli $x_1 \cdot x_2 < 0$.
Zatem wystarczające są następujące warunki:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$$

- $\Delta = 2^2 - 4\cdot(-0{,}5)\cdot(m^2-3m) = 2m^2-6m+4 = 2(m^2-3m+2) = 2(m-2)(m-1)$
- ze wzorów Viète'a: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^2-3m}{-0{,}5} = -2(m^2-3m)$.

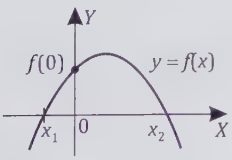
Stąd mamy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-2)(m-1) > 0 \\ -2(m^2-3m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m-1) > 0 \\ m(m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \\ m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

Równanie ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków wtedy, gdy $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

<u>II sposób</u> – skorzystamy z wykresu funkcji kwadratowej.
Rozwiązania równania $-0{,}5x^2+2x+m^2-3m=0$ to miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = -0{,}5x^2+2x+m^2-3m$. Miejsca zerowe są liczbami o przeciwnych znakach wówczas, gdy znajdują się na osi OX, po przeciwnych stronach liczby 0. Sytuację taką przedstawia rysunek.



Parabola będąca wykresem funkcji f skierowana jest ramionami do dołu (współczynnik przy x^2 jest ujemny), więc dla argumentu 0 wartość funkcji jest dodatnia (zobacz rysunek obok).

Stąd:

$f(0) = -0{,}5 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + m^2 - 3m = m^2 - 3m$

$f(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m(m-3) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Równanie ma rozwiązania o przeciwnych znakach wtedy, gdy $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

<u>III sposób</u> – skorzystamy z interpretacji graficznej równania.
Równanie zapiszemy w postaci

$-0{,}5x^2 + 2x = -m^2 + 3m$

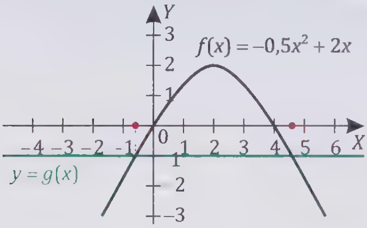
Oznaczamy lewą stronę równania jako

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x,$

zaś prawą stronę równania jako

$g(x) = -m^2 + 3m$

Równanie $-0{,}5x^2 + 2x = -m^2 + 3m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków, gdy wykresy funkcji f i g przecinają się w dwóch punktach, których odcięte (pierwsze współrzędne) są liczbami o przeciwnych znakach.
Wykresem funkcji $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x$ jest parabola ramionami zwrócona do dołu, o wierzchołku $W(2, 2)$. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 0 oraz 4. Funkcja $g(x) = -m^2 + 3m$ jest funkcją stałą (jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX).



Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach o odciętych będących liczbami o przeciwnych znakach, gdy funkcja stała g przyjmuje wartości ujemne dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$: $-m^2 + 3m < 0$.

Zatem:

$-m^2 + 3m < 0 \Leftrightarrow -(m-3) \cdot m < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Równanie ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków wtedy, gdy $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m-3)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania mniejsze od 2.

Zauważmy najpierw, że równanie $x^2 - (m-3)x + m = 0$ jest kwadratowe dla dowolnej wartości parametru m. Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby.

<u>I sposób</u> – skorzystamy ze wzorów Viète'a.

Równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy, gdy $\Delta > 0$. Rozwiązania są mniejsze od 2, czyli

$x_1 < 2$ i $x_2 < 2$, zatem

$x_1 - 2 < 0$ i $x_2 - 2 < 0$.

Wyrażenia $x_1 - 2$ oraz $x_2 - 2$ są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest dodatni i suma ujemna, czyli wtedy, gdy:

$(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) > 0$ i $(x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0$, stąd

$x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 > 0$ i $x_1 + x_2 - 4 < 0$, zatem
$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$ i $(x_1 + x_2) - 4 < 0$.
Warunki zadania możemy zapisać następująco:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ (x_1 + x_2) - 4 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy kolejno warunki otrzymanego układu.

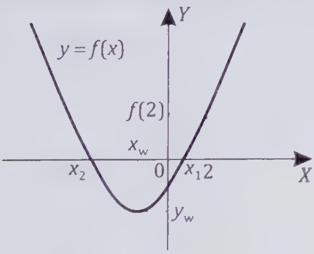
- $\Delta = [-(m-3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m^2 - 6m + 9 - 4m = m^2 - 10m + 9 = (m-1)(m-9)$
  $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-9) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty)$
- $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$
  Ze wzorów Viète'a: $x_1 \cdot x_2 = m$, $x_1 + x_2 = m - 3$.
  Stąd otrzymujemy:
  $$m - 2(m-3) + 4 > 0$$
  $$-m + 10 > 0$$
  $$m < 10$$
- $(x_1 + x_2) - 4 < 0$, czyli $(m-3) - 4 < 0$, więc $m < 7$.

Ostatecznie otrzymaliśmy:

$$\begin{cases} m \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty) \\ m \in (-\infty, 10) \\ m \in (-\infty, 7) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1)$$

Równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy, gdy $m \in (-\infty, 1)$.

<u>II sposób</u> – skorzystamy z własności funkcji kwadratowej.
Rozwiązania x_1, x_2 równania kwadratowego $x^2 - (m-3)x + m = 0$ to miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - (m-3)x + m$. Wykresem funkcji f jest parabola ramionami zwrócona do góry. Aby rozważane równanie spełniło warunki zadania, miejsca zerowe funkcji f muszą być liczbami mniejszymi od 2.



Rysunek przedstawia wykres funkcji kwadratowej odpowiadający warunkom zadania.
Warunki zadania można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) > 0 \\ x_w < 2 \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} [-(m-3)]^2 - 4m > 0 \\ 4 - (m-3) \cdot 2 + m > 0 \\ \dfrac{m-3}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-9) > 0 \\ -m + 10 > 0 \\ m - 3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty) \\ m < 10 \\ m < 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty, 1)$$

Dwa pierwiastki równania $x^2 - (m-3)x + m = 0$ są mniejsze od 2 wtedy, gdy $m \in (-\infty, 1)$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 + (m-1)x + m + 2 = 0$ spełniają warunek $|x_1| + |x_2| < 3$.

Równanie $x^2 + (m-1)x + m + 2 = 0$ to równanie kwadratowe, zatem ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$. Warunek $|x_1| + |x_2| < 3$ przekształcimy w sposób równoważny tak, aby skorzystać ze wzorów Viète'a. Obie strony nierówności są nieujemne, więc możemy podnieść je do kwadratu, zachowując znak nierówności bez zmian. Mamy:

$$|x_1| + |x_2| < 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 < 9 \Leftrightarrow |x_1|^2 + 2|x_1| \cdot |x_2| + |x_2|^2 < 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1{}^2 + 2|x_1x_2| + x_2{}^2 < 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| < 9$$

Zatem rozwiązania równania $x^2 + (m-1)x + m + 2 = 0$ spełniają nierówność $|x_1| + |x_2| < 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następująca koniunkcja warunków:

$$\textbf{(1)} \quad \Delta > 0 \quad \wedge \quad \textbf{(2)} \quad (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| < 9$$

Ad 1 $\Delta = (m-1)^2 - 4(m+2) = m^2 - 6m - 7 = (m-7)(m+1)$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-7)(m+1) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

Ad 2 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| < 9$

Ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = -(m-1)$, $x_1 \cdot x_2 = m + 2$. Zatem:

$[-(m-1)]^2 - 2(m+2) + 2|m+2| < 9$

Powyższą nierówność rozwiążemy, rozpatrując dwa przypadki ze względu na znak wyrażenia $m + 2$.

I.		II.
$\begin{cases} m < -2 \\ (m-1)^2 - 4(m+2) < 9 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} m \geqslant -2 \\ (m-1)^2 < 9 \end{cases}$
$\begin{cases} m < -2 \\ m^2 - 6m - 16 < 0 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} m \geqslant -2 \\ (m-1)^2 - 3^2 < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} m < -2 \\ (m-8)(m+2) < 0 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} m \geqslant -2 \\ (m-4)(m+2) < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} m < -2 \\ m \in (-2, 8) \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} m \geqslant -2 \\ m \in (-2, 4) \end{cases}$
układ sprzeczny		$m \in (-2, 4)$

Zbiorem rozwiązań warunku (1) jest $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$, zaś zbiorem rozwiązań warunku (2) jest przedział $(-2, 4)$. Zbiorem rozwiązań koniunkcji warunków (1) i (2) jest część wspólna otrzymanych zbiorów, zatem:

$$[m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty) \wedge m \in (-2, 4)] \Leftrightarrow m \in (-2, -1)$$

Rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 + (m-1)x + m + 2 = 0$ spełniają warunek $|x_1| + |x_2| < 3$ wtedy, gdy $m \in (-2, -1)$.

Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{(m-1)x^2+2mx+3m-2}$ jest zbiór $\mathbf{R}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych, tylko wtedy, gdy wyrażenie występujące pod znakiem pierwiastka kwadratowego przyjmuje wartości nieujemne dla każdego $x \in \mathbf{R}$, czyli gdy nierówność $(m-1)x^2+2mx+3m-2 \geqslant 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą x. Rozważymy dwa przypadki.

<u>I przypadek</u>

Współczynnik przy x^2 jest równy zeru, czyli $m-1=0$, skąd $m=1$. Wówczas nierówność jest liniowa i ma postać

$$2x+1 \geqslant 0$$

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $\langle -0{,}5,\ +\infty)$, który jest podzbiorem właściwym zbioru $\mathbf{R}$. Zatem nierówności nie spełnia każda liczba rzeczywista, więc parametr $m=1$ nie spełnia warunków zadania.

<u>II przypadek</u>

Jeśli $m \in \mathbf{R}-\{1\}$, to nierówność $(m-1)x^2+2mx+3m-2 \geqslant 0$ jest kwadratowa. Spełniają ją wszystkie liczby rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $g(x)=(m-1)x^2+2mx+3m-2$ ma ramiona skierowane do góry, a funkcja g ma co najwyżej jedno miejsce zerowe.
Zatem warunki zadania są spełnione wtedy, gdy:

$$\begin{cases} m-1>0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$$

Rozwiążemy kolejno otrzymane warunki:

- $m-1>0 \Leftrightarrow m>1 \Leftrightarrow m \in (1,+\infty)$
- $\Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow (2m)^2-4\cdot(m-1)\cdot(3m-2) \leqslant 0 \Leftrightarrow 4m^2-4\cdot(3m^2-5m+2) \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2m^2-5m+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\left(m-\frac{1}{2}\right)(m-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty)$$

Stąd mamy:

$$\begin{cases} m \in (1, +\infty) \\ m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \langle 2, +\infty)$$

Teraz wystarczy zsumować uzyskane wyniki w obu rozważanych przypadkach.

Dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{(m-1)x^2+2mx+3m-2}$ jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy, gdy $m \in \langle 2, +\infty)$.

Przykład 6.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których przedział $(-\infty, 1)$ zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności $mx^2 - x + m + 2 > 0$.

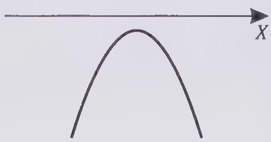
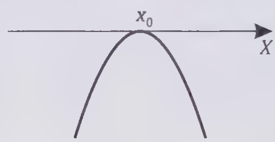
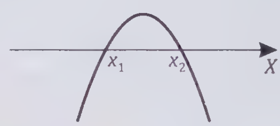
Rozpatrzymy trzy przypadki ze względu na współczynnik przy x^2.

<u>I przypadek</u> $m = 0$

Jeśli $m = 0$, to nierówność jest liniowa i ma postać: $-x + 2 > 0$, a jej zbiorem rozwiązań jest przedział $(-\infty, 2)$. Zatem $(-\infty, 1) \subset (-\infty, 2)$, czyli parametr $m = 0$ spełnia warunki zadania.

<u>II przypadek</u> $m < 0$

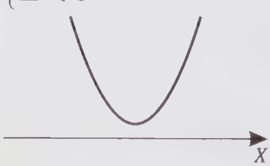
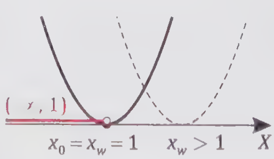
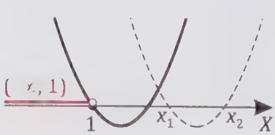
Wówczas parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = mx^2 - x + m + 2$ jest skierowana ramionami do dołu. Przeanalizujemy, czy możliwa jest taka sytuacja, aby przedział $(-\infty, 1)$ zawierał się w zbiorze rozwiązań nierówności $mx^2 - x + m + 2 > 0$. Możliwe położenia paraboli będącej wykresem funkcji f i zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ ilustrują poniższe rysunki.

$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$  $f(x) > 0$ brak rozwiązań	$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$  $f(x) > 0$ brak rozwiązań	$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (x_1, x_2)$

Zauważmy, że przedział $(-\infty, 1)$ nie jest podzbiorem zbioru pustego ani przedziału ograniczonego (x_1, x_2). Jeśli $m < 0$, to warunki zadania nie są spełnione.

<u>III przypadek</u> $m > 0$

Parabola będąca wykresem funkcji $f(x) = mx^2 - x + m + 2$ skierowana jest ramionami do góry. Możliwe położenia wykresu funkcji f i zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ ilustrują poniższe rysunki.

$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}$; $(-\infty, 1) \subset \boldsymbol{R}$	$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - \{x_w\}$; $(-\infty, 1) \subset \boldsymbol{R} - \{x_w\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(1) \geqslant 0$ i $x_w \geqslant 1$	$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$; $(-\infty, 1) \subset [(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \geqslant 1$ i $x_2 > 1$ oraz $x_w > 1$, czyli $f(1) \geqslant 0$ i $x_w > 1$

Z naszych rozważań wynika, że warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} m>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \vee \begin{cases} m>0 \\ \Delta=0 \\ f(1)\geqslant 0 \\ x_w \geqslant 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m>0 \\ \Delta>0 \\ f(1)\geqslant 0 \\ x_w > 1 \end{cases}$$

Zauważmy, że warunek drugi i trzeci możemy zapisać jako jeden warunek

$$\begin{cases} m>0 \\ \Delta\geqslant 0 \\ f(1)\geqslant 0 \\ x_w \geqslant 1 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy: a) $\begin{cases} m>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \vee$ b) $\begin{cases} m>0 \\ \Delta\geqslant 0 \\ f(1)\geqslant 0 \\ x_w \geqslant 1 \end{cases}$

Obliczymy najpierw potrzebne wielkości:

- $\Delta=(-1)^2-4\cdot m\cdot(m+2)=-4m^2-8m+1$
- $f(1)=m\cdot 1^2-1+m+2=2m+1$
- $x_W=\frac{1}{2m}$. Stąd mamy:

Ad a)

$$\begin{cases} m>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ -4m^2-8m+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

Ad b)

$$\begin{cases} m>0 \\ \Delta\geqslant 0 \\ f(1)\geqslant 0 \\ x_w\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ -4m^2-8m+1\geqslant 0 \\ 2m+1\geqslant 0 \\ \frac{1}{2m}\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(0, \frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$$

Sumujemy otrzymane zbiory rozwiązań a) oraz b) i uwzględniamy I przypadek. Przedział $(-\infty, 1)$ zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności $mx^2-x+m+2>0$ wtedy, gdy $m\in\langle 0, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $mx^2+2x+m=0$ ze względu na wartość parametru m. Naszkicuj wykres funkcji $y=g(m)$, która każdej wartości parametru m przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.
2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+(m-3)x+m^2=0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.
3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których nierówność $(m-2)x^2+mx+(m-2)>0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.
4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których suma kwadratów rozwiązań równania $x^2-(m-3)x+m=0$ pomniejszona o 9 osiąga najmniejszą wartość. Ile ta wartość wynosi?

Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = |2x - x^2| - x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci $f(x) = |x(2 - x)| - x^2$.
Aby opuścić znak wartości bezwzględnej, ustalimy najpierw znak wyrażenia $x(2 - x)$.
Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej $y = x(2 - x)$, który jest parabolą ramionami zwróconą do dołu, mającą z osią OX dwa punkty wspólne $(0, 0)$ oraz $(2, 0)$, stwierdzamy, że:

$$x(2-x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, 2\rangle \quad \text{oraz} \quad x(2-x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

Stąd otrzymujemy:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 - x^2, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 2\rangle \\ -2x + x^2 - x^2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty), \end{cases} \quad \text{czyli}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 2\rangle \\ -2x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

Wykres funkcji f jest sumą wykresów funkcji:

$f_1(x) = -2x^2 + 2x$, gdzie $x \in \langle 0, 2\rangle$, oraz $f_2(x) = -2x$, gdzie $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

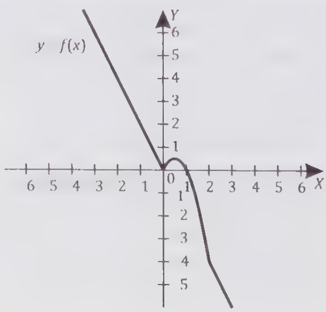
Sprowadzamy wzór funkcji $f_1(x) = -2x^2 + 2x$ do postaci kanonicznej:

$$f_1(x) = -2x^2 + 2x = -2(x^2 - x) = -2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Wykres funkcji f_1 otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y = -2x^2$ o wektor $\vec{u} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ponieważ funkcja f_1 jest określona w przedziale $\langle 0, 2\rangle$, obliczymy też jej wartości na końcach tego przedziału:

$$f_1(0) = -2\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{oraz} \quad f_1(2) = -2\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -4.$$

Wykres funkcji $f_2(x) = -2x$ szkicujemy w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = |2x - x^2| - x^2$, $x \in \mathbf{R}$.



Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = 3 - \left|x^2 - |x| - 2\right|$, $x \in \mathbf{R}$.

Z własności wartości bezwzględnej wiemy, że $x^2 = |x|^2$, zatem

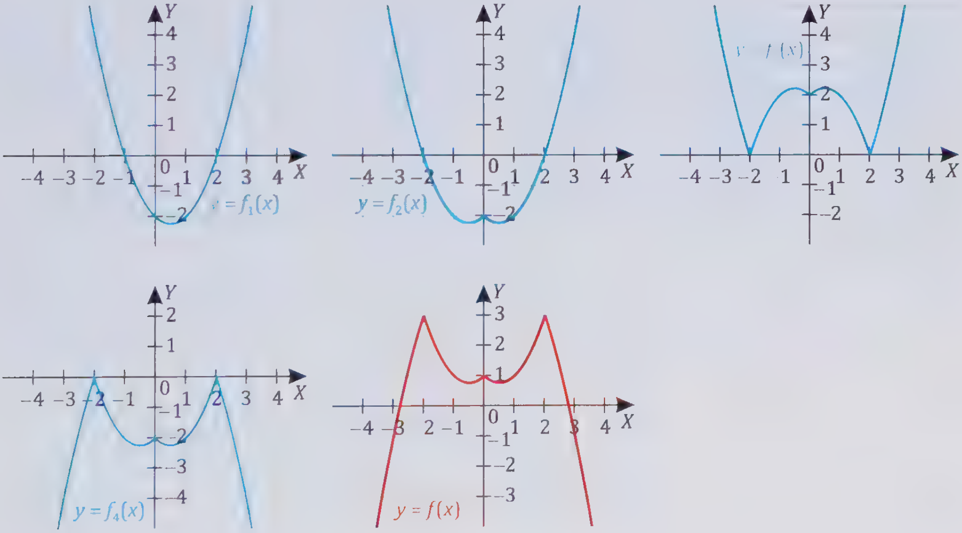
$$f(x) = 3 - \left||x|^2 - |x| - 2\right|$$

Teraz skorzystamy z przekształceń wykresów funkcji, które poznałeś w klasie pierwszej. Ustalimy kolejność przekształceń:

$$f_1(x) = x^2 - x - 2 \xrightarrow{y = f_1(|x|)} f_2(x) = |x|^2 - |x| - 2 \xrightarrow{y = |f_2(x)|} f_3(x) = \left||x|^2 - |x| - 2\right| \xrightarrow{S_{OX}}$$

$$f_4(x) = -\left||x|^2 - |x| - 2\right| \xrightarrow{T_{\vec{u}=[0,3]}} f(x) = 3 - \left||x|^2 - |x| - 2\right|$$

Aby naszkicować wykres funkcji $f_1(x) = x^2 - x - 2$, należy wyznaczyć punkty charakterystyczne wykresu: miejsca zerowe funkcji f_1: -1 oraz 2; współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f_1: $\left(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}\right)$; współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f_1 z osią OY: $(0, -2)$. Wykres funkcji f_1 oraz wykresy pozostałych funkcji (przeanalizuj je!) przestawiają rysunki poniżej.



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności, jeśli:
   a) $f(x) = x \cdot |x - 1|$ b) $f(x) = |x + 3| \cdot x - 2x$ c) $f(x) = x^2 - |x^2 - 4|$
2. Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności, jeśli:
   a) $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ b) $f(x) = 1 - |x^2 - 1|$ c) $f(x) = x^2 - 4|x| - 5$

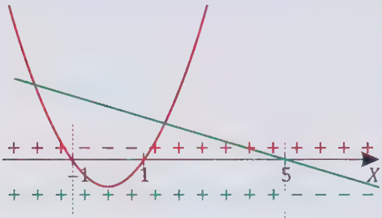
Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych z wartością bezwzględną zilustrujemy przykładami.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $|x^2-1|+|5-x|-6=0$.

W tym przypadku skorzystamy z definicji wartości bezwzględnej i zapiszemy dane równanie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej. Aby określić znak wyrażenia x^2-1 oraz $5-x$, posłużymy się szkicami wykresów: funkcji kwadratowej $f_1(x)=x^2-1$ oraz funkcji liniowej $f_2(x)=5-x$.



Na podstawie rysunku łatwo ustalić, że:

$(x^2-1\geqslant 0 \wedge 5-x\geqslant 0) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,5\rangle$

$(x^2-1<0 \wedge 5-x>0) \Leftrightarrow x\in(-1,1)$

$(x^2-1>0 \wedge 5-x<0) \Leftrightarrow x\in(5,+\infty)$

Teraz wystarczy rozważyć trzy przypadki:
1) jeśli $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,5\rangle$, to $|x^2-1|=x^2-1$ oraz $|5-x|=5-x$;
2) jeśli $x\in(-1,1)$, to $|x^2-1|=-x^2+1$ oraz $|5-x|=5-x$;
3) jeśli $x\in(5,+\infty)$, to $|x^2-1|=x^2-1$ oraz $|5-x|=-5+x$.

Równanie $|x^2-x|+|5-x|-6=0$ możemy zapisać w postaci alternatywy następujących układów warunków:

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,5\rangle \\ x^2-1+5-x-6=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(-1,1) \\ -x^2+1+5-x-6=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(5,+\infty) \\ x^2-1-5+x-6=0, \end{cases}$$

skąd

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,5\rangle \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(-1,1) \\ -x^2-x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(5,+\infty) \\ x^2+x-12=0, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,5\rangle \\ (x-2)(x+1)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(-1,1) \\ x(x+1)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(5,+\infty) \\ (x+4)(x-3)=0, \end{cases}$$

zatem

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,5\rangle \\ x\in\{-1,2\} \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(-1,1) \\ x\in\{-1,0\} \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(5,+\infty) \\ x\in\{-4,3\} \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$[x\in\{-1,2\} \vee x\in\{0\}] \Leftrightarrow x\in\{-1,0,2\}$$

Rozwiązaniami równania $|x^2-x|+|5-x|-6=0$ są liczby: -1, 0, 2.

Przykład 2.

Rozwiążemy równania:

a) $|3x^2 - 2x| = 1$

b) $|3x^2 + 8x + 1| = 3x^2 + 8x + 1$

Każde z powyższych równań możemy rozwiązać metodą przedstawioną w przykładzie 1. (spróbuj rozwiązać te równania, korzystając z definicji wartości bezwzględnej). My jednak przedstawimy inne sposoby rozwiązań. Do rozwiązania równań zastosujemy własności wartości bezwzględnej.

Ad a) Wiemy, że

jeśli $a > 0$, to $|w| = a \Leftrightarrow (w = -a \vee w = a)$.

Zatem równanie $|3x^2 - 2x| = 1$ przedstawiamy w postaci alternatywy dwóch równań:

$$3x^2 - 2x = -1 \vee 3x^2 - 2x = 1,$$

skąd

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \vee \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$\Delta = -8, -8 < 0$ $\quad$ $\Delta = 16, \sqrt{\Delta} = 4$

równanie sprzeczne $\quad$ $x = -\frac{1}{3} \vee x = 1$

Równanie $|3x^2 - 2x| = 1$ ma dwa rozwiązania: $-\frac{1}{3}$, 1.

Ad b) Zauważmy, że

$$|w| = w \Leftrightarrow w \geqslant 0$$

Zatem, aby rozwiązać równanie

$$|3x^2 + 8x + 1| = 3x^2 + 8x + 1,$$

wystarczy wyznaczyć zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie $3x^2 + 8x + 1$ jest nieujemne. Mamy:

$$3x^2 + 8x + 1 \geqslant 0$$

$$\Delta = 52, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{13}}{3}, x_2 = \frac{-4 + \sqrt{13}}{3}$$

Parabola będąca wykresem funkcji $y = 3x^2 + 8x + 1$ zwrócona jest ramionami do góry, więc $3x^2 + 8x + 1 \geqslant 0$ wtedy, gdy

$$x \in \left(-\infty, \frac{-4 - \sqrt{13}}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{-4 + \sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$$

Równanie $|3x^2 + 8x + 1| = 3x^2 + 8x + 1$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste należące do zbioru

$$\left(-\infty, \frac{-4 - \sqrt{13}}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{-4 + \sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$$

Przykład 3.

Rozwiążemy algebraicznie i graficznie równanie $|x^2+2x-3|=|x-1|$.

1) Rozwiązanie algebraiczne

Skorzystamy z własności wartości bezwzględnej:

$$|a|=|b| \Leftrightarrow (a=b \vee a=-b)$$

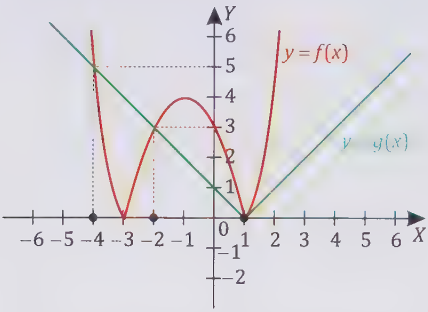
Zatem:

$$|x^2+2x-3|=|x-1| \Leftrightarrow \left[x^2+2x-3=x-1 \;\vee\; x^2+2x-3=-x+1\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[x^2+x-2=0 \vee x^2+3x-4=0\right] \Leftrightarrow \left[(x+2)(x-1)=0 \vee (x+4)(x-1)=0\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[x \in \{-2, 1\} \vee x \in \{-4, 1\}\right] \Leftrightarrow x \in \{-4, -2, 1\}$$

Rozwiązaniami równania $|x^2+2x-3|=|x-1|$ są liczby: -4, -2 oraz 1.

2) Rozwiązanie graficzne

Równanie $|x^2+2x-3|=|x-1|$ traktujemy jako równość dwóch wartości funkcji: $f(x)=|x^2+2x-3|$ oraz $g(x)=|x-1|$. Wykresy funkcji f i g szkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych i wyznaczymy te argumenty, dla których funkcje przyjmują tę samą wartość.



Łatwo sprawdzić, że:

$f(-4)=g(-4)=5$

$f(-2)=g(-2)=3$

$f(1)=g(1)=0$

Rozwiązaniami równania $|x^2+2x-3|=|x-1|$ są liczby: -4, -2, 1.

Przykład 4.

Rozwiążemy algebraicznie i graficznie nierówność $\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2}-|x-6|$.

1) Rozwiązanie algebraiczne

Nierówność przekształcamy równoważnie w następujący sposób:

$$\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2}-|x-6|$$
$$\frac{1}{2}(x^2-6x+9) \geqslant 4\frac{1}{2}-|x-6|$$
$$\frac{1}{2}x^2-3x+4\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}+|x-6| \geqslant 0$$
$$\frac{1}{2}x^2-3x+|x-6| \geqslant 0$$

Teraz rozważymy dwa przypadki ze względu na znak wyrażenia $x-6$.

$$\begin{cases} x < 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x - (x-6) \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + x - 6 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \geqslant 0 \end{cases}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \geqslant 0$ jest $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$, zaś zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \geqslant 0$ jest $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$ (sprawdź). Otrzymujemy:

$$\begin{cases} x < 6 \\ x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty) \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 6 \\ x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 6, +\infty), \end{cases}$$

zatem $x \in (-\infty, 2\rangle \vee x \in \langle 6, +\infty)$, czyli $x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$.
Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2} - |x-6|$ jest $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$.

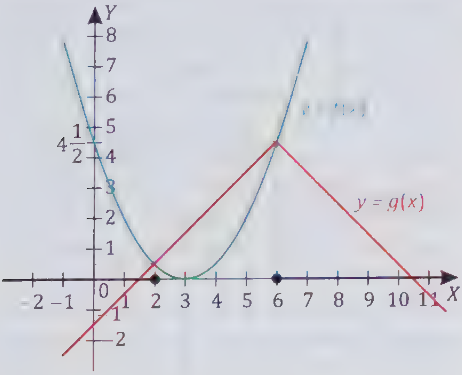
<u>2) Rozwiązanie graficzne</u>

Przyjmijmy, że $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ oraz $g(x) = 4\frac{1}{2} - |x-6|$.

Aby rozwiązać nierówność $\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2} - |x-6|$, wystarczy wyznaczyć zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja g.
Szkicujemy wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.

- $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{T_{\vec{u}=[3,\,0]}} f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$
- $g_1(x) = -|x| \xrightarrow{T_{\vec{v}=\left[6,\,4\frac{1}{2}\right]}} g(x) = 4\frac{1}{2} - |x-6|$

Wykresy funkcji f i g przedstawione są na poniższym rysunku.



Wykresy przecinają się w punktach $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ oraz $\left(6, 4\frac{1}{2}\right)$ (sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia).

Z wykresu odczytujemy, że $f(x) \geqslant g(x)$ wtedy, gdy $x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$, zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{2}(x-3)^2 \geqslant 4\frac{1}{2} - |x-6|$ jest $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówności:

a) $|x^2 - 2x| < 1$

b) $(4x-1)^2 - 2|4x-1| - 3 \geqslant 0$

Ad a) Z własności wartości bezwzględnej wiemy, że

jeśli $a > 0$, to $|w| < a \Leftrightarrow -a < w < a$.

Zatem nierówność

$$|x^2 - 2x| < 1$$

możemy zapisać w postaci nierówności podwójnej $-1 < x^2 - 2x < 1$, która jest równoważna układowi nierówności

$$\begin{cases} x^2 - 2x > -1 \\ x^2 - 2x < 1, \end{cases} \quad \text{czyli}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

Teraz wystarczy rozwiązać każdą nierówność układu, a następnie wyznaczyć część wspólną ich zbiorów rozwiązań.

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x + 1 > 0$, czyli $(x-1)^2 > 0$, jest zbiór

$$\boldsymbol{R} - \{1\}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x - 1 < 0$ jest zbiór

$\left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$ (sprawdź).

Zatem zbiorem rozwiązań układu nierówności jest zbiór

$$\left(1 - \sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x^2 - 2x| < 1$ jest $\left(1 - \sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$.

Ad b) Zauważmy, że $w^2 = |w|^2$, zatem nierówność

$$(4x-1)^2 - 2|4x-1| - 3 \geqslant 0$$

możemy zapisać w postaci:

$$|4x-1|^2 - 2|4x-1| - 3 \geqslant 0$$

Rozwiążemy tę nierówność, wprowadzając zmienną pomocniczą t, gdzie

$$t = |4x-1|$$

Otrzymujemy nierówność kwadratową

$$t^2 - 2t - 3 \geqslant 0$$

z niewiadomą t. Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest zbiór

$(-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$, czyli

$$t \leqslant -1 \vee t \geqslant 3$$

Ale $t = |4x - 1|$, więc mamy alternatywę nierówności:

$$|4x-1| \leqslant -1 \ \vee \ |4x-1| \geqslant 3$$

Zauważ, że nierówność

$$|4x-1| \leqslant -1$$

jest sprzeczna.

Nierówność $|4x-1| \geqslant 3$ rozwiążemy, korzystając z własności wartości bezwzględnej:

$$\text{jeśli } a > 0, \text{ to } |w| \geqslant a \Leftrightarrow (w \leqslant -a \ \vee \ w \geqslant a)$$

Otrzymujemy:

$$|4x-1| \geqslant 3 \Leftrightarrow (4x-1 \leqslant -3 \ \vee \ 4x-1 \geqslant 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x \leqslant -2 \ \vee \ 4x \geqslant 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \leqslant -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geqslant 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$$

Ostatecznie:

$$\left[|4x-1| \leqslant -1 \vee |4x-1| \geqslant 3\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $(4x-1)^2 - 2|4x-1| - 3 \geqslant 0$ jest $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:
   a) $|x^2 - 4| = 1$ b) $x^2 + |x-3| = 4x - 3$ c) $2|x^2+1| = |x| + 1$
2. Rozwiąż nierówności:
   a) $|x^2 - 4x - 3| < 6$ b) $|x+1| \geqslant x^2 - |x-1|$ c) $|x| + |1 - x^2| > 1$
3. Rozwiąż algebraicznie i graficznie równania:
   a) $x^2 + 3|x-1| = 1$ b) $(x+1) \cdot |x-2| = 2 - x$
4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówności:
   a) $|2 - x^2| < x$ b) $|x^2 - 3x| \geqslant 2x$

Równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem

Przykład 1.

Wyznaczymy liczbę rozwiązań równania $x^2 - 2|x| - m^2 + 1 = 0$ ze względu na wartość parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

<u>I sposób</u> – rozwiązanie algebraiczne.

Rozważymy dwa przypadki ze względu na wartość bezwzględną.

$$\text{I. } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x - m^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \text{II. } \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

<u>I przypadek</u>

$$x^2 + 2x - m^2 + 1 = 0 \ \wedge\ x \in (-\infty, 0)$$
$$\Delta = 4 - 4(-m^2 + 1) = 4m^2$$

Ponieważ $\Delta \geqslant 0$ dla każdego $m \in \boldsymbol{R}$, więc równanie $x^2 + 2x - m^2 + 1 = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej jedno rozwiązanie.

- Jeśli $\Delta = 0$ $(m = 0)$, to równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych jedno rozwiązanie równe -1. Rozwiązanie to jest także rozwiązaniem rozważanego równania, bo $-1 \in (-\infty, 0)$.
  Zatem jeśli $m = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie -1.
- Jeśli $\Delta > 0$ $\left(m \in \boldsymbol{R} - \{0\}\right)$, to równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych dwa rozwiązania x_1, x_2, gdzie:
  $$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4m^2}}{2} = \frac{-2 - 2|m|}{2} = -1 - |m|$$
  $$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{4m^2}}{2} = \frac{-2 + 2|m|}{2} = -1 + |m|$$

Liczby x_1, x_2 będą rozwiązaniami rozważanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy będą należały do zbioru $(-\infty, 0)$. Mamy zatem trzy przypadki:

– równanie nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ oraz $x_1 \notin (-\infty, 0)$ i $x_2 \notin (-\infty, 0)$, czyli:
$$[-1 - |m| \geqslant 0 \ \wedge\ -1 + |m| \geqslant 0 \ \wedge\ m \in \boldsymbol{R} - \{0\}] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [|m| \leqslant -1 \ \wedge\ |m| \geqslant 1 \ \wedge\ m \in \boldsymbol{R} - \{0\}] \qquad \text{układ warunków sprzeczny}$$

– równanie ma dwa różne rozwiązania, z których każde jest różne od -1, wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \boldsymbol{R}\quad\{0\}$ oraz $x_1 \in (-\infty, 0)$ i $x_2 \in (-\infty, 0)$, czyli:
$$[-1 - |m| < 0 \ \wedge\ -1 + |m| < 0 \ \wedge\ m \in \boldsymbol{R} - \{0\}] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [|m| > -1 \ \wedge\ |m| < 1 \ \wedge\ m \in \boldsymbol{R} - \{0\}] \Leftrightarrow m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

– równanie ma jedno rozwiązanie (różne od -1) wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ oraz $x_1 \in (-\infty, 0)$ i $x_2 \notin (-\infty, 0)$ lub $x_1 \notin (-\infty, 0)$ i $x_2 \in (-\infty, 0)$.
Taka sytuacja ma miejsce dla pozostałych wartości parametru m, czyli wtedy, gdy $m \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Podsumujmy nasze rozważania dla I przypadku.

Równanie $x^2 + 2x - m^2 + 1 = 0$, gdzie $x < 0$ ma:

- jedno rozwiązanie wtedy, gdy $m \in (-\infty, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, +\infty)$
- dwa rozwiązania wtedy, gdy $m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

II przypadek

$x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0 \ \wedge \ x \in \langle 0, +\infty)$; wówczas $\Delta = 4m^2$.

Dla każdego $m \in \boldsymbol{R}$ $\Delta \geqslant 0$, więc równanie $x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych co najmniej jedno rozwiązanie.

- Jeśli $\Delta = 0$ $(m = 0)$, to równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych jedno rozwiązanie równe 1. Liczba 1 należy do przedziału $\langle 0, +\infty)$, więc jest rozwiązaniem rozważanego równania.
  Zatem jeśli $m = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie równe 1.
- Jeśli $\Delta > 0$ $(m \in \boldsymbol{R} - \{0\})$, to równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych dwa rozwiązania x_3, x_4, gdzie:
  $$x_3 = 1 - |m|, \quad x_4 = 1 + |m|.$$

Liczby x_3, x_4 są rozwiązaniami rozważanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy należą do przedziału $\langle 0, +\infty)$. Zachodzą następujące przypadki:

- równanie nie ma rozwiązań wtedy, gdy $m \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ oraz $x_3 \notin \langle 0, +\infty)$ i $x_4 \notin \langle 0, +\infty)$; taki przypadek nie zachodzi (sprawdź)
- równanie ma dwa różne rozwiązania, z których każde jest różne od 1 wtedy, gdy $m \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ oraz $x_3 \in \langle 0, +\infty)$ i $x_4 \in \langle 0, +\infty)$, czyli wtedy, gdy
  $m \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$ (sprawdź)
- równanie ma jedno rozwiązanie (różne od 1) wtedy, gdy $m \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ oraz $x_3 \in \langle 0, +\infty)$ i $x_4 \notin \langle 0, +\infty)$ lub $x_3 \notin \langle 0, +\infty)$ i $x_4 \in \langle 0, +\infty)$, czyli wtedy, gdy
  $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (sprawdź).

Podsumujmy II przypadek.

Równanie $x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0$, gdzie $x \geqslant 0$, ma:

- jedno rozwiązanie wtedy, gdy $m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$
- dwa rozwiązania wtedy, gdy $m \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$.

Nasze spostrzeżenia zapiszemy w tabelach:

I przypadek: $x^2 + 2x - m^2 + 1 = 0 \wedge x < 0$

liczba rozwiązań równania	wartość parametru
1	$m \in (-\infty, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, +\infty)$
2	$m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

II przypadek: $x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0 \wedge x \geqslant 0$

liczba rozwiązań równania	wartość parametru
1	$m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$
2	$m \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$

Równanie wyjściowe $x^2 - 2|x| - m^2 + 1 = 0$ ma:

- dwa rozwiązania, jeśli każde z równań I. oraz II. ma po jednym rozwiązaniu, czyli:
  $$[m \in (-\infty, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, +\infty) \wedge m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)] \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$$
- trzy rozwiązania, jeśli równanie I. ma jedno rozwiązanie i równanie II. ma dwa rozwiązania lub równanie I. ma dwa rozwiązania i równanie II. ma jedno rozwiązanie, czyli:
  $$\begin{cases} m \in (-\infty, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, +\infty) \\ m \in \langle -\infty, 1) \cup (0, 1\rangle \end{cases} \vee \begin{cases} m \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow m \in \{-1, 1\}$$
- cztery rozwiązania, jeśli równanie I. i równanie II. mają po dwa rozwiązania, czyli:
  $$\begin{cases} m \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ m \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

Ostatecznie równanie $x^2 - 2|x| - m^2 + 1 = 0$ ma:

dwa rozwiązania, jeśli $m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$
trzy rozwiązania, jeśli $m \in \{-1, 1\}$
cztery rozwiązania, jeśli $m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

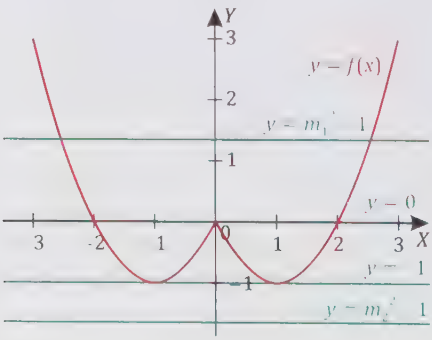
Dyskusja nad liczbą rozwiązań równania kwadratowego z wartością bezwzględną i parametrem nie musi być tak pracochłonna, jak pokazuje powyższe rozwiązanie algebraiczne. Wszystko zależy od metody, jaką wybieramy do rozwiązania danego problemu. W tym przypadku zdecydowanie krótsze i łatwiejsze jest rozwiązanie graficzne.

<u>II sposób</u> – rozwiązanie graficzne.

Równanie $x^2 - 2|x| - m^2 + 1 = 0$ jest równoważne równaniu $x^2 - 2|x| = m^2 - 1$.
Równanie $x^2 - 2|x| = m^2 - 1$ interpretujemy jako równość wartości dwóch funkcji tej samej zmiennej x:

$$f(x) = x^2 - 2|x| \text{ oraz } g(x) = m^2 - 1, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R},\ m \in \boldsymbol{R}.$$

Równanie $f(x) = g(x)$ ma tyle rozwiązań, ile punktów wspólnych mają (w zależności od wartości parametru m) wykresy funkcji f i g. Funkcja $g(x) = m^2 - 1$ jest funkcją stałą.
Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 2|x|$ otrzymamy w wyniku przekształcenia $f(x) = f_1(|x|)$, gdzie $f_1(x) = x^2 - 2x$. Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.



Z rysunku odczytujemy, że równanie $x^2 - 2|x| = m^2 - 1$:

- nie ma rozwiązań wtedy, gdy:
  $m^2 - 1 < -1 \Leftrightarrow m^2 < 0$ – nierówność sprzeczna
- ma dwa rozwiązania wtedy, gdy:
  $m^2 - 1 = -1 \vee m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$
- ma trzy rozwiązania wtedy, gdy:
  $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 1$
- ma cztery rozwiązania wtedy, gdy:
  $-1 < m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < m^2 < 1 \Leftrightarrow m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Równanie $x^2 - 2|x| - m^2 + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania, jeśli $m \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$; trzy rozwiązania, jeśli $m \in \{-1, 1\}$; cztery rozwiązania, jeśli $m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Przykład 2.

Wyznaczymy liczbę rozwiązań równania $|x^2 + 3x - 4| = m \cdot |x - 1|$ ze względu na wartość parametru m oraz ustalimy, jaki znak mają te rozwiązania.

Zauważmy, że wyrażenie $x^2 + 3x - 4$ możemy zapisać w postaci iloczynowej $(x + 4)(x - 1)$. Stąd równanie ma postać

$$|(x + 4)(x - 1)| = m \cdot |x - 1|$$

Korzystając z własności wartości bezwzględnej, a następnie z prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania, otrzymujemy:

$$|x + 4| \cdot |x - 1| = m \cdot |x - 1|$$
$$|x + 4| \cdot |x - 1| - m \cdot |x - 1| = 0$$
$$|x - 1| \cdot (|x + 4| - m) = 0$$

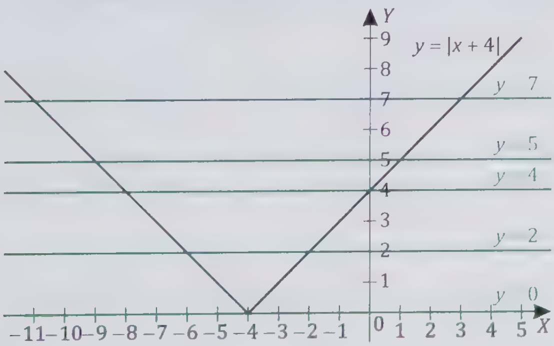
Z własności iloczynu mamy:

$$|x - 1| = 0 \vee |x + 4| = m$$

Równanie $|x^2 + 3x - 4| = m \cdot |x - 1|$ przekształciliśmy równoważnie, otrzymując alternatywę prostych równań z wartością bezwzględną.

Równanie $|x - 1| = 0$ ma jedno rozwiązanie równe 1.

Liczbę rozwiązań oraz znaki rozwiązań równania $|x + 4| = m$ ustalimy, interpretując to równanie graficznie jako równość wartości funkcji $y = |x + 4|$ oraz $y = m$.



Zauważ, że jeśli $m = 5$, to równanie $|x + 4| = 5$ ma dwa rozwiązania, z których jednym jest 1.

Z rysunku odczytujemy, że równanie $|x + 4| = m$:
- nie ma rozwiązań wtedy, gdy $m < 0$
- ma jedno rozwiązanie ($x = -4$) wtedy, gdy $m = 0$
- ma dwa rozwiązania wtedy, gdy $m > 0$, przy czym:
  - oba rozwiązania są ujemne i żadne z nich nie jest równe 1, jeśli $m \in (0, 4)$
  - jedno rozwiązanie jest ujemne, zaś drugie równe zeru, jeśli $m = 4$
  - jedno rozwiązanie jest ujemne, zaś drugie dodatnie i różne od 1, jeśli $m \in (4, 5) \cup (5, +\infty)$
  - jedno rozwiązanie jest ujemne, a drugie równe 1, jeśli $m = 5$.

Podsumujmy nasze rozważania.

Równanie $|x^2 + 3x - 4| = m \cdot |x - 1|$ ma:
- jedno rozwiązanie, jeśli $m \in (-\infty, 0)$; rozwiązanie to jest dodatnie ($x = 1$)
- dwa rozwiązania, jeśli $m \in \{0, 5\}$, przy czym jedno jest ujemne, a drugie dodatnie
- trzy rozwiązania, jeśli $m \in (0, 5) \cup (5, +\infty)$, przy czym:
  - jeśli $m \in (0, 4)$, to dwa rozwiązania są ujemne i jedno dodatnie
  - jeśli $m = 4$, to jedno rozwiązanie jest ujemne, drugie dodatnie i trzecie równe zero
  - jeśli $m \in (4, 5) \cup (5, +\infty)$, to jedno rozwiązanie jest ujemne i dwa dodatnie.

Spróbuj przeanalizować liczbę rozwiązań równania $|x^2 + 3x - 4| = m \cdot |x - 1|$ ze względu na wartość parametru m, interpretując je jako równość wartości dwóch funkcji $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$ oraz $g(x) = m \cdot |x - 1|$.
Zauważ, że jeśli $m = 0$, to funkcja g ma wzór $g(x) = 0$; zaś jeśli $m \neq 0$, to do przeanalizowania wykresu funkcji g zastosuj powinowactwo prostokątne.

Która metoda rozwiązania w tym przypadku jest bardziej pożądana?

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), dla których równanie $x^2 - (m - 3) \cdot |x| + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

Zauważmy, że dane równanie można zapisać w postaci:

(*) $\qquad |x|^2 - (m - 3) \cdot |x| + m = 0$

Równanie (*) sprowadzamy do równania kwadratowego przez podstawienie $t = |x|$.
Otrzymujemy:

(**) $\qquad t^2 - (m - 3) \cdot t + m = 0$

Równanie (*) będzie miało dwa różne rozwiązania wtedy, gdy równanie kwadratowe (**) z niewiadomą t będzie miało jedno rozwiązanie dodatnie lub dwa różne rozwiązania, z których jedno jest dodatnie, a drugie ujemne.

Zatem na równanie $t^2 - (m - 3) \cdot t + m = 0$ wystarczy nałożyć następujące warunki:

$$\begin{cases} \Delta_t = 0 \\ t_0 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \Delta_t > 0 \\ t_1 \cdot t_2 < 0 \end{cases}$$

Obliczamy kolejno:

- $\Delta_t = [-(m-3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = (m-3)^2 - 4m =$
  $= m^2 - 6m + 9 - 4m = m^2 - 10m + 9 =$
  $= (m-1)(m-9)$
- $t_0 = \dfrac{m-3}{2}$
- $t_1 \cdot t_2 = m$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} (m-1)(m-9) = 0 \\ \dfrac{m-3}{2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (m-1)(m-9) > 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} m \in \{1, 9\} \\ m > 3 \end{cases} \vee \begin{cases} m \in (-\infty, 1) \cup (9, +\infty) \\ m < 0, \end{cases}$$

zatem

$$m = 9 \vee m \in (-\infty, 0),$$

czyli

$$m \in (-\infty, 0) \cup \{9\}$$

Równanie $x^2 - (m-3) \cdot |x| + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania, jeśli $m \in (-\infty, 0) \cup \{9\}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

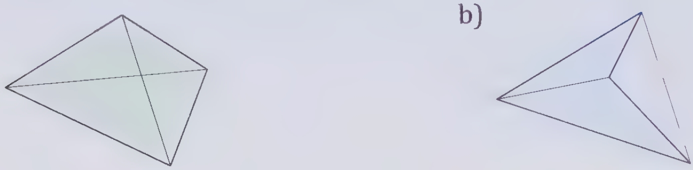
1. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 1| = 3 - m^2$ ze względu na wartość parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$).
2. Wyznacz te wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których równanie $x \cdot |x + 1| - x = 6 - 2m$ ma więcej rozwiązań ujemnych niż dodatnich.
3. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|x^2 + 5x + 6| = m \cdot |x + 2|$ ze względu na wartość parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$).
4. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (m + 2) \cdot |x| + m + 3 = 0$ nie ma rozwiązań?

3. Geometria płaska – czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy

Czworokąt jest to wielokąt mający cztery boki.

a) b)

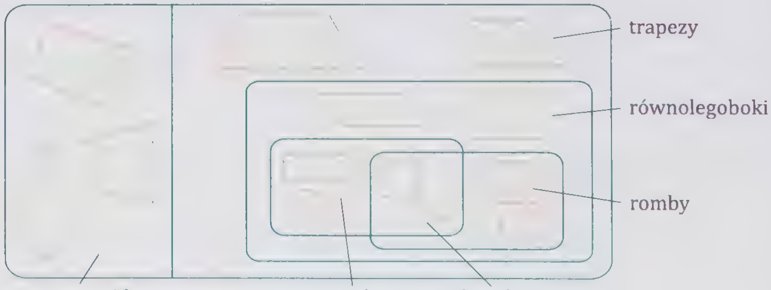


Czworokąt na rys. a) jest wypukły, a na rys. b) wklęsły. Odcinek, który łączy dwa wierzchołki wielokąta i nie jest jego bokiem, nazywamy **przekątną wielokąta**. Każdy czworokąt ma dwie przekątne. Zauważ, że przekątna nie musi zawierać się w wielokącie.
Suma długości boków wielokąta to jego obwód.

Spróbuj udowodnić następujące twierdzenie.

> ***Twierdzenie 1.***
> Suma kątów dowolnego czworokąta jest równa 360°.

Poniżej przedstawiamy podział czworokątów wypukłych.



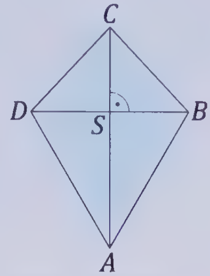
Zasadniczy podział czworokątów wypukłych wyznaczony jest przez liczbę par boków równoległych. I tak mamy:

- **trapezoidy**, czyli czworokąty niemające ani jednej pary boków równoległych;
- **trapezy**, czyli czworokąty mające co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wśród trapezów ważną grupę stanowią:

- **równoległoboki**, czyli czworokąty mające dwie pary boków równoległych.

Przykładem trapezoidu jest deltoid. **Deltoidem** nazywamy czworokąt wypukły, który ma tylko jedną oś symetrii zawierającą przekątną tego czworokąta.



Twierdzenie 2. (własności deltoidu)

a) Przekątne deltoidu są prostopadłe.
b) Miary kątów deltoidu między bokami mającymi różne długości są równe.
c) Przekątna deltoidu łącząca wierzchołki kątów o różnych miarach zawiera się w ich dwusiecznych.
d) Punkt przecięcia przekątnych deltoidu dzieli przekątną – łączącą wierzchołki kątów o równych miarach – na połowy.

Powyższe twierdzenie udowodnisz bez trudu, jeśli zauważysz, że trójkąty ACD i ACB są przystające oraz trójkąty DSC i BSC są przystające.

W kolejnych tematach zajmiemy się własnościami czworokątów wypukłych.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$, wiedząc, że:
   a) najmniejszym kątem jest kąt przy wierzchołku A, a kolejne kąty, zaczynając od kąta przy wierzchołku B, są większe o $10°$ od kąta poprzedniego
   b) pozostają one w stosunku $1 : 2 : 4 : 5$.

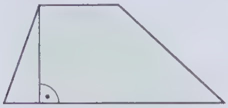
2. Obwód czworokąta jest równy 52 cm. Jedna przekątna dzieli czworokąt na dwa trójkąty: jeden równoboczny i drugi równoramienny, w którym ramię jest o 6 cm krótsze od podstawy. Oblicz długość boków czworokąta. Rozważ dwa przypadki.

3. W czworokącie $ABCD$ sumy miar przeciwległych kątów są równe. Wiedząc, że $|\sphericalangle DAB| : |\sphericalangle BCD| = 4 : 5$ oraz kąt ADC ma miarę o $40°$ większą niż kąt ABC, oblicz miary kątów czworokąta. Czy dany czworokąt jest deltoidem? Odpowiedź uzasadnij.

4. Obwód deltoidu jest równy 70 cm. Jeden z jego boków jest o 25% krótszy od drugiego.
   a) Oblicz długości wszystkich boków deltoidu.
   b) Wiedząc dodatkowo, że przekątna niebędąca osią symetrii figury ma długość 24 cm, oblicz długość drugiej przekątnej.

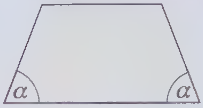
Trapezy

Przypomnijmy: **trapezy** to czworokąty mające co najmniej jedną parę boków równoległych. Boki równoległe nazywamy **podstawami**, pozostałe – **ramionami**. W ramach tego tematu zajmiemy się własnościami trapezów, głównie tych, które mają tylko jedną parę boków równoległych.

a)


b)

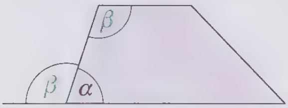

c)


d)


Na rysunku c) jest przedstawiony trapez prostokątny (czyli trapez, w którym jedno z ramion jest prostopadłe do podstaw), a na rysunku d) – trapez równoramienny (czyli trapez, w którym kąty przy podstawie są równe).

Wysokością trapezu nazywamy odcinek (a także jego długość) prostopadły do podstaw, którego końce należą do podstaw lub ich przedłużeń.

Rozważmy dowolny trapez. Oznaczmy kąty przy jednym z ramion przez α i β.



Przedłużamy podstawę i oznaczamy kąt β_1 przyległy do α (patrz rysunek obok). Mamy więc

$$\alpha + \beta_1 = 180°$$

Ale

$\beta_1 = \beta$ (na mocy twierdzenia, które poznałeś w klasie pierwszej, o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą, kąty β_1 i β to kąty naprzemianległe wewnętrzne). Otrzymujemy więc równość

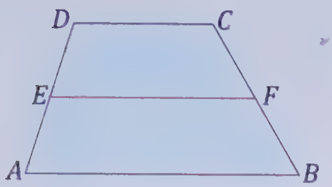
$$\alpha + \beta = 180°$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
W dowolnym trapezie suma kątów przy każdym ramieniu jest równa 180°.

W klasie pierwszej poznałeś też twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta (przypomnij sobie to twierdzenie!). Udowodnimy teraz podobne twierdzenie dotyczące trapezów.

Twierdzenie 2.
W dowolnym trapezie odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw trapezu i jego długość jest połową sumy długości podstaw.



Założenie: dany jest trapez $ABCD$

$AB \parallel CD$

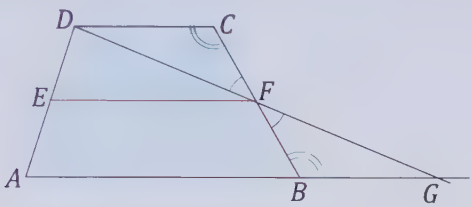
$|AE| = |ED|$

$|BF| = |FC|$

Teza: $EF \parallel AB$

$|EF| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right)$

Dowód (sposób I – z wykorzystaniem przystawania trójkątów):
Prowadzimy prostą DF, która przecina prostą AB w punkcie G:



Zauważamy, że:

$|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle BFG|$ (kąty wierzchołkowe)

$|\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle GBF|$ (kąty naprzemianległe wewnętrzne)

$|BF| = |FC|$ (z założenia)

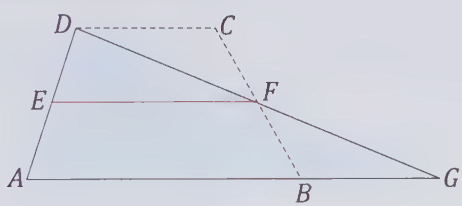
Z tego wynika, że

$\Delta CDF \equiv \Delta BGF$ (cecha kbk przystawania trójkątów)

Przystawanie trójkątów CDF i BGF pozwala stwierdzić, że

$|CD| = |BG|$ i $|DF| = |FG|$

Zatem odcinek EF łączy środki boków AD i GD trójkąta AGD.



Tak więc z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta wynika, że

$EF \parallel AG$, czyli również

$EF \parallel AB$ oraz

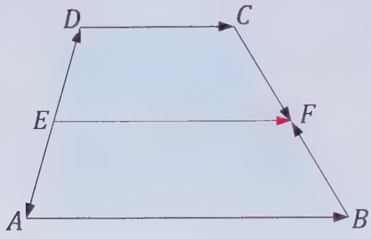
$|EF| = \frac{1}{2}|AG|$, ale

$|AG| = |AB| + |BG| = |AB| + |CD|$, więc ostatecznie

$|EF| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right)$, co kończy dowód twierdzenia.

Dowód (sposób II – z wykorzystaniem działań na wektorach):

Niech wierzchołki A, B, C, D trapezu oraz środki E, F ramion wyznaczają wektory.



Wektor $\overrightarrow{EF}$ przedstawimy na dwa sposoby jako sumę innych wektorów

(1) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$

(2) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

Równości (1) i (2) dodajemy stronami i otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \left(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BF}\right)$$

Wektory $\overrightarrow{ED}$ i $\overrightarrow{EA}$ oraz $\overrightarrow{CF}$ i $\overrightarrow{BF}$ to pary wektorów przeciwnych, więc ich suma jest wektorem zerowym. Zatem:

$$2 \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe (z założenia) oraz mają zgodne zwroty, więc z ostatniej równości wynika, że

$$EF \parallel AB \parallel DC$$

oraz

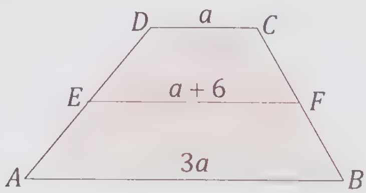
$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|,$$

zatem

$$|EF| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right),$$ co kończy dowód twierdzenia.

Przykład 1.

Stosunek długości podstaw trapezu jest równy 1 : 3. Odcinek łączący środki ramion w tym trapezie jest o 6 cm dłuższy od krótszej podstawy. Obliczymy długość tego odcinka.



Ponieważ $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{3}$, więc możemy przyjąć, że dla pewnej dodatniej liczby a

$|CD| = a$ i $|AB| = 3a$

Odcinek EF jest o 6 cm dłuższy od podstawy CD, więc

$|EF| = |CD| + 6$

$|EF| = a + 6$

Z ostatniego twierdzenia wynika, że

$|EF| = \frac{1}{2}\big(|CD| + |AB|\big)$. Zatem

$a + 6 = \frac{1}{2}(a + 3a)$

Rozwiązujemy otrzymane równanie i otrzymujemy:

$a = 6$

Tak więc $|EF| = 6 + 6 = 12$ (cm).

Zajmiemy się teraz własnościami trapezów równoramiennych. Przypomnijmy: trapez równoramienny to taki trapez, którego kąty przy podstawie są równe. Łatwo można udowodnić następujące twierdzenie.

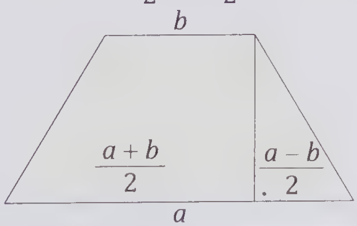
Twierdzenie 3.

Jeśli trapez jest równoramienny, to jego ramiona mają takie same długości.

Ostatnia własność może wydawać się banalna. Ale nie do końca tak jest. Otóż twierdzenie odwrotne do ostatniego twierdzenia jest zdaniem fałszywym. To znaczy trapez, którego ramiona mają równe długości, może nie być – w myśl podanej przez nas definicji – trapezem równoramiennym. Przykładem takiego trapezu jest równoległobok, który nie jest prostokątem.

Twierdzenie 4.

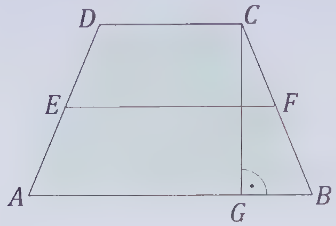
W trapezie równoramiennym o podstawach mających długości a, b $(a > b)$ wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na odcinki, których długości są równe $\frac{a+b}{2}$ i $\frac{a-b}{2}$.



Spróbuj udowodnić to twierdzenie.

Przykład 2.

W trapezie równoramiennym odcinek łączący środki ramion ma długość 20 cm, ramię ma długość 17 cm, a wysokość – 15 cm. Obliczymy długości podstaw tego trapezu.



Przyjmując oznaczenia jak na rysunku, otrzymujemy:

$AB \parallel CD$, $|AD| = |BC|$

punkty E, F to odpowiednio środki ramion AD i BC.
Z danych zadania wiemy, że

$|EF| = 20$ cm
$|AD| = |BC| = 17$ cm
$|CG| = 15$ cm

Najpierw obliczymy długość odcinka GB, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta GBC:

$|CG|^2 + |GB|^2 = |BC|^2$, skąd
$15^2 + |GB|^2 = 17^2$, zatem
$|GB| = 8$ (cm), $|GB| > 0$

Z twierdzenia 2. (dotyczącego każdego trapezu) wiemy, że

$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$$

Z twierdzenia 4. (dotyczącego tylko trapezów równoramiennych) wynika, że

$|AG| = \dfrac{|AB| + |CD|}{2}$, zatem
$|AG| = |EF| = 20$ (cm)

Obliczamy długość podstawy AB

$|AB| = |AG| + |GB| = 20 + 8 = 28$ (cm)

Obliczamy długość podstawy CD

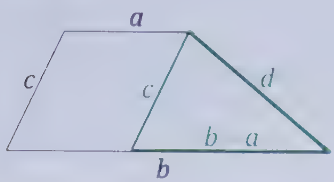
$|CD| = |AG| - |GB| = 20 - 8 = 12$ (cm)

Podstawy trapezu mają długości 28 cm i 12 cm.

Przykład 3.

Dane są cztery odcinki, których długości są równe: a, b, c, d, gdzie $b > a$. Z tych odcinków zbudujemy trapez, którego podstawy mają długości a, b, natomiast ramiona – długości c, d.

Analiza:

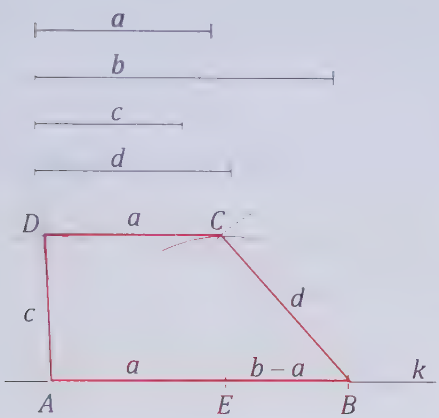


Zauważmy, że z odcinków mających długości a, b, c, d można zbudować trapez o podstawach mających długości a, b $(b > a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy z odcinków mających długości

$c, d, b - a$

można zbudować trójkąt.

Konstrukcja:



Opis konstrukcji

1. Na dowolnej prostej k odkładamy odcinek AB, $|AB| = b$.
2. Na prostej k odkładamy taki odcinek AE, że $|AE| = a$ i $|EB| = b - a$.
3. Kreślimy łuk okręgu o środku w punkcie E i promieniu c oraz łuk okręgu o środku w punkcie B i promieniu d. Łuki przecinają się w punkcie C (nad prostą k).
4. Kreślimy łuk okręgu o środku w punkcie C i promieniu a oraz łuk okręgu o środku w punkcie A i promieniu c. Łuki przecinają się w punkcie D (nad prostą k).
5. Czworokąt $ABCD$ spełnia warunki zadania.

Zadanie ma jedno rozwiązanie, jeśli z odcinków mających długości $c, d, b - a$ można zbudować trójkąt. W przeciwnym wypadku zadanie nie ma rozwiązania.

Sprawdź, czy rozumiesz

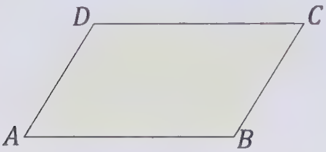
1. Naszkicuj trapez $ABCD$, którego kąty ostre mają miary: $|\sphericalangle A| = 60°$, $|\sphericalangle B| = 30°$. Dorysuj prostą DE, która odcina od trapezu trójkąt równoboczny AED. Porównaj miary kątów powstałego trapezu $EBCD$ z miarami kątów trapezu $ABCD$.
2. W trapezie prostokątnym różnica długości podstaw wynosi 2 cm, a krótsze ramię ma długość $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz:
   a) długość dłuższego ramienia trapezu
   b) miarę kąta ostrego trapezu.
3. W trapezie równoramiennym wysokość jest równa $\sqrt{3}$ cm, a odcinek łączący środki ramion ma długość $\sqrt{6}$ cm. Oblicz długość przekątnej trapezu.
4. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne przecinają się w punkcie S.
   a) Wykaż, że trójkąty ABS i DSC są podobne.
   b) Wiedząc dodatkowo, że $|SD| : |SB| - 2 : 3$ oraz różnica długości podstaw wynosi 5 cm, oblicz długości tych podstaw.

Równoległoboki

Ostatnią grupą czworokątów, które omówimy, są równoległoboki. **Równoległobokiem** nazywamy czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Twierdzenie 1. (własności równoległoboku)
a) Długości dowolnych dwóch przeciwległych boków równoległoboku są równe.
b) Dowolne dwa przeciwlegle kąty równoległoboku są równe.
c) Punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli te przekątne na połowy.
d) Suma kątów leżących przy każdym boku równoległoboku jest równa 180°.

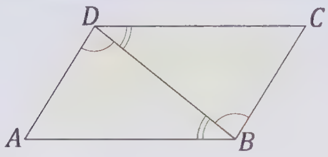
Udowodnimy podpunkt a) tego twierdzenia.



Założenie:
dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$

Teza:
$|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$

Dowód: Prowadzimy jedną przekątną równoległoboku, np. przekątną DB:



Wykażemy, że $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$. Mamy bowiem:

$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|$ (na mocy twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą)

$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CBD|$ (na mocy twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą)

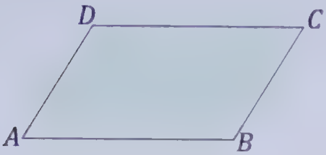
DB wspólny bok wskazanych trójkątów

Zatem na mocy cechy kbk przystawania trójkątów otrzymujemy, że $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$. Z tego wynika, że $|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$, co kończy dowód twierdzenia 1a.

Okazuje się, że prawdziwe jest również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
a') Jeśli długości każdych dwóch przeciwległych boków czworokąta są równe, to czworokąt ten jest równoległobokiem.
b') Jeśli każde dwa przeciwległe kąty czworokąta są równe, to czworokąt ten jest równoległobokiem.
c') Jeśli punkt przecięcia przekątnych czworokąta dzieli te przekątne na połowy, to czworokąt ten jest równoległobokiem.
d') Jeśli suma kątów leżących przy każdym boku czworokąta jest równa 180°, to czworokąt ten jest równoległobokiem.

Udowodnimy twierdzenie 2a').



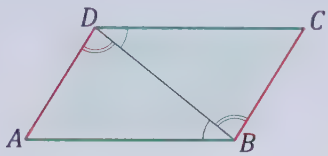
Założenie:

dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$

Teza:

$AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$

Dowód: Prowadzimy jedną przekątną równoległoboku, np. przekątną DB:



Wykażemy, że $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$. Mamy bowiem:

$|AB| = |CD|$ (z założenia)

$|AD| = |BC|$ (z założenia)

DB wspólny bok trójkątów

Zatem na mocy cechy bbb przystawania trójkątów otrzymujemy, że $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$. Z tego wynika, że odpowiadające sobie kąty w tych trójkątach są równe:

$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|$

$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CBD|$

Kąty ABD i CDB to kąty naprzemianległe wewnętrzne, wyznaczone przez dwie proste AD i BC przecięte prostą DB. Skoro są one równe, to – na mocy twierdzenia, o którym była mowa w klasie pierwszej – proste AD i BC są równoległe, czyli

$AD \parallel BC$

Podobnie można wykazać, że

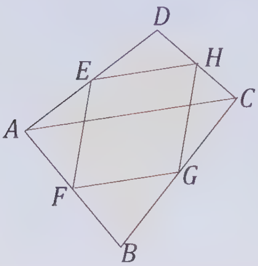
$AB \parallel CD$

Praktyczny wniosek z powyższych rozważań jest następujący: jeśli chcemy udowodnić, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, to wystarczy wykazać, że spełniony jest jeden z poniższych warunków:

1) Każde dwa przeciwległe boki czworokąta $ABCD$ są równoległe.
2) Długości dwóch przeciwległych boków czworokąta $ABCD$ są równe.
3) Każde dwa przeciwległe kąty czworokąta $ABCD$ są równe.
4) Punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ dzieli te przekątne na połowy.
5) Suma kątów leżących przy każdym boku czworokąta $ABCD$ jest równa 180°.

Przykład 1.

Wykażemy, że środki boków dowolnego trapezoidu są wierzchołkami pewnego równoległoboku.



Niech dany będzie trapezoid *ABCD*, a punkty *E, F, G, H* będą środkami boków tego trapezoidu.

Wykażemy, że przeciwległe boki czworokąta *EFGH* mają równe długości.

Rozważmy trójkąt *ACD*. Odcinek *EH* łączy środki boków *AD* i *CD* w tym trójkącie, zatem

$|EH| = \frac{1}{2}|AC|$ (z jakiego twierdzenia korzystamy?)

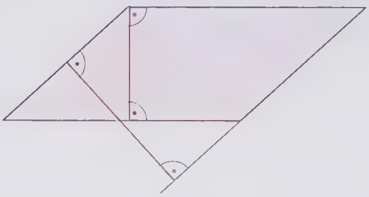
Rozpatrując trójkąt *ABC*, możemy wykazać, że

$|FG| = \frac{1}{2}|AC|$, zatem $|EH| = |FG| = \frac{1}{2}|AC|$.

Postępując podobnie, można wykazać, że $|EF| = |GH| = \frac{1}{2}|BD|$.

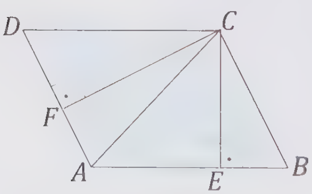
Przeciwległe boki czworokąta *EFGH* mają więc równe długości, zatem czworokąt ten jest równoległobokiem.
Czy czworokąt *ABCD* musi być trapezoidem?

Wysokością równoległoboku nazywamy odcinek (a także jego długość) prostopadły do boków równoległych, którego końce należą do tych boków lub do ich przedłużeń.



Przykład 2.

W równoległoboku *ABCD* (patrz rysunek poniżej) wysokość *CE* jest równa 12 cm i dzieli bok *AB* na takie odcinki *AE* i *EB*, że $|AE| = 9$ cm i $|EB| = 5$ cm. Obliczymy wysokość *CF* poprowadzoną z wierzchołka *C* na bok *AD* równoległoboku.



W rozwiązaniu wykorzystamy fakt, że trójkąty *ABC* i *ACD* mają równe pola (ponieważ są przystające) i że odcinki *CE* i *CF* są wysokościami w tych trójkątach.
Obliczamy pole trójkąta *ABC*

$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CE|$, więc $P_{ABC} = 84 \text{ cm}^2$

Obliczamy długość odcinka *AD*.

$|AD| = |BC|$ i $|BC| = 13$ cm (korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *EBC*), więc

$|AD| = 13$ cm

Obliczamy wysokość CF.

$P_{ACD} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |CF|$ i $P_{ACD} = 84 \text{ cm}^2$, więc

$84 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot |CF|$, zatem

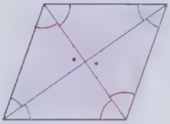
$|CF| = 12\frac{12}{13}$ (cm)

Wysokość CF równoległoboku $ABCD$ jest równa $12\frac{12}{13}$ cm.

Prostokątem nazywamy równoległobok, który ma wszystkie kąty proste.

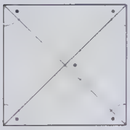
Prostokąt ma wszystkie własności równoległoboku (twierdzenie 1.), a ponadto jego przekątne mają równe długości.

Rombem nazywamy równoległobok, którego wszystkie boki mają równe długości.



Romb ma wszystkie własności równoległoboku (twierdzenie 1.), a ponadto:
- przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych kątów;
- przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

Kwadratem nazywamy romb, który ma wszystkie kąty proste (lub równoważnie: prostokąt, którego wszystkie boki mają takie same długości).

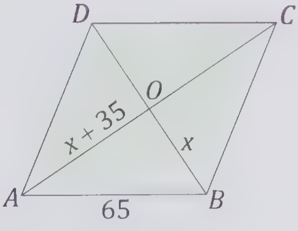


Kwadrat ma zatem wszystkie własności rombu i prostokąta.

Przykład 3.

Skwer ma kształt rombu o boku mającym długość 65 m. Wzdłuż przekątnych rombu biegną alejki spacerowe, z których jedna jest o 70 m dłuższa od drugiej. Obliczymy długości tych alejek.

Niech romb przedstawiony poniżej symbolizuje skwer. Wprowadźmy oznaczenia takie jak na rysunku.



Przekątne rombu dzielą się na połowy i przecinają pod kątem prostym.
Oznaczmy

$|BD| = 2x$ – długość (w metrach) krótszej alejki, $x > 0$
$|AC| = 2x + 70$ – długość (w metrach) dłuższej alejki

Wówczas

$|AO| = x + 35$
$|BO| = x$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO otrzymujemy

$|AO|^2 + |OB|^2 = |AB|^2$, stąd
$(x + 35)^2 + x^2 = 65^2$
$x^2 + 2 \cdot 35 \cdot x + 35^2 + x^2 = 4225$
$x^2 + 70x + 1225 + x^2 = 4225$
$2x^2 + 70x - 3000 = 0 \quad / : 2$
$x^2 + 35x - 1500 = 0$
$\Delta = 7225 \quad \sqrt{\Delta} = 85$
$x_1 = -60 \qquad x_2 = 25$

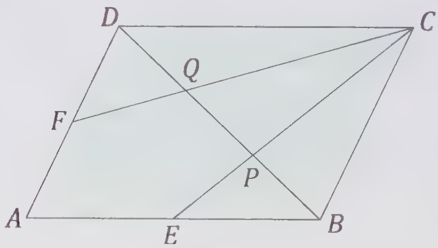
Liczba -60 nie spełnia warunku $x > 0$ $(-60 < 0)$.
Zatem

$|AC| = 2 \cdot 25 + 70 = 120$ (m)
$|BD| = 2 \cdot 25 = 50$ (m)

Alejki mają długości 50 m i 120 m.

Przykład 4.

W równoległoboku $ABCD$ punkty E, F są odpowiednio środkami boków AB i AD. Wykażemy, że odcinki CE i CF dzielą przekątną BD równoległoboku na trzy równe części.



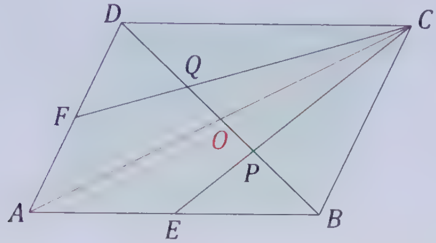
Założenie:

$ABCD$ – równoległobok
E – środek odcinka AB
F – środek odcinka AD
$\{P\} = CE \cap BD \qquad \{Q\} = CF \cap BD$

Teza:

$|BP| = |PQ| = |QD|$

Dowód:
Prowadzimy przekątną AC równoległoboku. Punkt przecięcia przekątnych oznaczmy przez O. Jak pamiętasz, punkt O dzieli przekątne na połowy.



Rozważmy trójkąt ABC. Zauważmy, że w trójkącie tym odcinki CE i BO są środkowymi. Wiadomo, że środkowe w trójkącie przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2. Mamy więc

$$|BP| = 2 \cdot |OP|,$$

czyli

$$|BP| = \frac{2}{3}|BO|,$$

skąd

$$|BP| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |BD|, \text{ bo } \frac{1}{2} \cdot |BD| = |BO|.$$

Otrzymujemy więc

$$|BP| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$$

Jeśli rozpatrzymy trójkąt ACD i przeprowadzimy podobne rozumowanie, to uzyskamy zależność

$$|QD| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$$

Stąd łatwo już wywnioskować, że

$$|PQ| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$$

Ostatecznie otrzymaliśmy, że

$$|BP| = |PQ| = |QD| = \frac{1}{3} \cdot |BD|,$$ co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

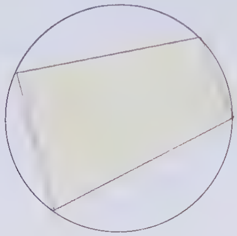
1. W równoległoboku krótszy bok ma długość 15 cm, krótsza wysokość jest równa 12 cm, a długość krótszej przekątnej wynosi 20 cm. Oblicz:
   a) długość dłuższego boku
   b) dłuższą wysokość
   c) długość dłuższej przekątnej równoległoboku.

2. W prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość 8 cm, a bok BC jest o 2 cm krótszy od przekątnej BD. Oblicz obwód prostokąta $ABCD$.

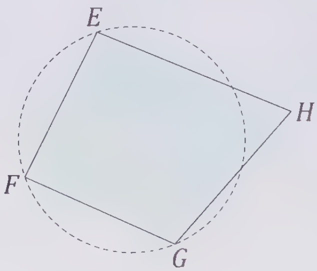
3. Wykaż, że:
   a) jeśli przekątne prostokąta są dwusiecznymi jego kątów, to prostokąt jest kwadratem
   b) jeśli przekątne rombu mają równe długości, to romb jest kwadratem.

Okrąg opisany na czworokącie

Powiemy, że **okrąg jest opisany na czworokącie** (**czworokąt jest wpisany w okrąg**) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek czworokąta leży na okręgu.

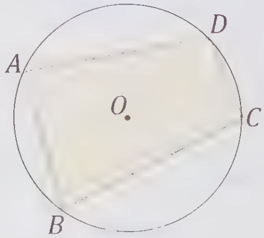


Powstaje pytanie, czy na każdym czworokącie można opisać okrąg (jak pamiętasz z klasy pierwszej – okrąg można było opisać na każdym trójkącie). Otóż istnieją czworokąty, na których nie można opisać okręgu. Takim czworokątem jest na przykład czworokąt $EFGH$ na rysunku poniżej.



Punkty E, F, G jednoznacznie wyznaczają okrąg (na rysunku zaznaczony linią przerywaną). Zatem nie istnieje inny okrąg, do którego należałyby punkty E, F, G oraz punkt H.

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku w punkcie O i zastanówmy się, jakie własności ma ten wielokąt.



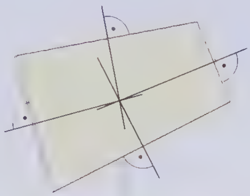
Punkty A, B, C, D należą do okręgu o środku w punkcie O, więc

$$|AO| = |BO| = |CO| = |DO|$$

Mówiąc inaczej: środek okręgu jest równo odległy od wierzchołków czworokąta. Zatem środek okręgu należy do symetralnej każdego boku czworokąta (przypomnij sobie własność symetralnej odcinka). Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Jeśli można opisać okrąg na czworokącie, to symetralne wszystkich boków tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

Jeśli teraz założymy, że symetralne boków czworokąta mają punkt wspólny, to punkt ten jest równo odległy od wierzchołków tego czworokąta. Zatem jest środkiem okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki czworokąta.



Twierdzenie 2.
Jeśli symetralne wszystkich boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

Ostatnie dwa twierdzenia można zapisać następująco.

Twierdzenie 3.
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

Ten wspólny punkt symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie.

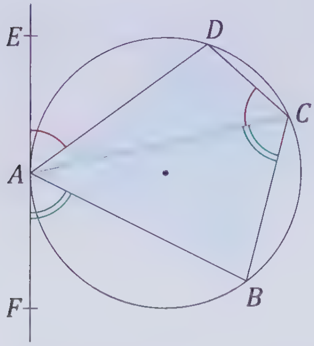
Poznamy jeszcze inne cechy czworokąta, który można wpisać w okrąg.

Twierdzenie 4.
Jeśli czworokąt można wpisać w okrąg, to sumy przeciwległych kątów czworokąta są równe i wynoszą po 180°.

Założenie: $ABCD$ – czworokąt, który można wpisać w okrąg

Teza: $|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| = |\sphericalangle B| + |\sphericalangle D| = 180°$

Dowód:
Niech czworokąt $ABCD$ będzie wpisany w okrąg (zobacz rysunek poniżej)



Prowadzimy styczną do okręgu w punkcie A i przekątną AC czworokąta. Wówczas kąt dopisany EAD jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany ACD, więc

$$|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle ACD|$$

Podobnie

$$|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle ACB|$$

Zatem

$$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| = |\sphericalangle EAF| = 180°$$

Suma kątów w czworokącie jest równa 360°, więc

$|\sphericalangle B| + |\sphericalangle D| = 180°$, co kończy dowód.

Przykład 1.

Obliczymy miary kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg, wiedząc, że $|\sphericalangle C| = 3|\sphericalangle A|$ i $|\sphericalangle D| = 5|\sphericalangle B|$.

Najpierw wyznaczymy miary kątów przy wierzchołkach A i C. Z ostatniego twierdzenia wynika, że

$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| = 180°$, a z założenia, że

$|\sphericalangle C| = 3|\sphericalangle A|$

Zatem

$|\sphericalangle A| + 3|\sphericalangle A| = 180°$, skąd

$|\sphericalangle A| = 45°$ oraz $|\sphericalangle C| = 135°$.

Podobnie obliczamy miary kątów przy wierzchołkach B i D:

$|\sphericalangle B| + |\sphericalangle D| = 180°$ oraz $|\sphericalangle D| = 5|\sphericalangle B|$

$|\sphericalangle B| + 5|\sphericalangle B| = 180°$, skąd

$|\sphericalangle B| = 30°$ oraz $|\sphericalangle D| = 150°$.

Miary kątów czworokąta $ABCD$ są odpowiednio równe: 45°, 30°, 135°, 150°.

Twierdzenie 5.

Jeśli sumy przeciwległych kątów czworokąta są równe (i wynoszą po 180°), to można na tym czworokącie opisać okrąg.

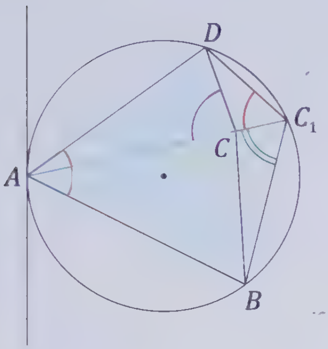
Założenie: $ABCD$ – czworokąt

$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| = |\sphericalangle B| + |\sphericalangle D| = 180°$

Teza: na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg

Dowód (nie wprost):
Załóżmy, że na czworokącie $ABCD$ nie można opisać okręgu. Przez wierzchołki A, B, D prowadzimy okrąg. Wówczas odległość wierzchołka C od środka okręgu jest mniejsza lub większa niż promień tego okręgu.

<u>I przypadek</u> Odległość wierzchołka C od środka okręgu jest mniejsza niż promień okręgu.



Rysujemy przekątną AC i przedłużamy ją do przecięcia z okręgiem w punkcie C_1. Zauważmy, że

$$|\sphericalangle ACD| > |\sphericalangle CC_1D|$$

Kąt ACD jest bowiem kątem zewnętrznym trójkąta CC_1D, jest więc równy sumie kątów wewnętrznych tego trójkąta do niego nieprzyległych. W szczególności jest większy od każdego z tych kątów nieprzyległych. Podobnie – w przypadku trójkąta CC_1B – otrzymujemy

$$|\sphericalangle ACB| > |\sphericalangle CC_1B|$$

Zatem

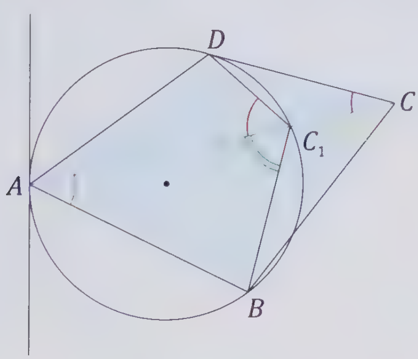
$$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| > |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BC_1C| + |\sphericalangle CC_1D| = 180°$$

Ostatnia równość wynika z twierdzenia 4. W rezultacie otrzymaliśmy:

$$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| > 180°,$$

co jest sprzeczne z założeniem.

<u>II przypadek</u> Odległość wierzchołka C od środka okręgu jest większa niż promień okręgu.



Rysujemy przekątną AC, która przecina okrąg w punkcie C_1. Zauważmy, że

$$|\sphericalangle AC_1D| > |\sphericalangle C_1CD|$$

Kąt AC_1D jest bowiem kątem zewnętrznym trójkąta C_1CD, jest więc równy sumie kątów wewnętrznych tego trójkąta do niego nieprzyległych. W szczególności jest większy od każdego z tych kątów nieprzyległych. Podobnie – w przypadku trójkąta CC_1B – otrzymujemy

$|\sphericalangle AC_1B| >$ |[illegible]|

Zatem

$$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| < |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BC_1A| + |\sphericalangle AC_1D| = 180°$$

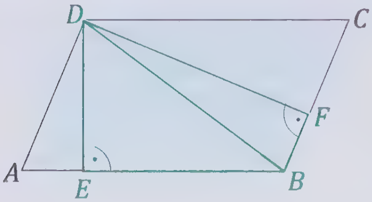
Ostatnia równość wynika z twierdzenia 4. W rezultacie otrzymaliśmy:

$$|\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| < 180°$$

co znowu jest sprzeczne z założeniem. Nasze przypuszczenie, że na czworokącie *ABCD* nie można opisać okręgu, w obu przypadkach doprowadziło do sprzeczności. Oznacza to, że na czworokącie można opisać okrąg.

Przykład 2.

W równoległoboku *ABCD* mamy dane: $|AB| = 21$ cm i $|AD| = 13$ cm. Z wierzchołka *D* kąta rozwartego poprowadzono dwie wysokości *DE* i *DF* równoległoboku. Krótsza wysokość jest równa 12 cm.
a) Wykażemy, że na czworokącie *EBFD* można opisać okrąg.
b) Wyznaczymy promień okręgu, który można opisać na czworokącie *EBFD*.



Niech czworokąt *ABCD* będzie równoległobokiem, w którym

$$|AD| = |BC| = 13 \text{ cm}, \ |AB| = |CD| = 21 \text{ cm}$$

DE – wysokość poprowadzona na dłuższy bok

$$|DE| = 12 \text{ cm}$$

DF – wysokość poprowadzona na krótszy bok

Ad a) Na mocy ostatniego twierdzenia wystarczy pokazać, że suma przeciwległych kątów czworokąta *EBFD* jest równa 180°. Obliczamy:

$|\sphericalangle E| + |\sphericalangle F| = 90° + 90° = 180°$ (ponieważ *DE* i *DF*, to wysokości równoległoboku),
co kończy dowód.

Ad b) Wiemy już, że na czworokącie *EBFD* można opisać okrąg. Zauważ, że odcinek *BD* jest średnicą tego okręgu (dlaczego?). Obliczymy długość odcinka *BD*. Mamy:

$|DE| = 12$ cm $\quad |EB| = 16$ cm (dlaczego?)

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DEB* do wyznaczenia $|BD|$:

$|DE|^2 + |EB|^2 = |BD|^2$, skąd $|BD| = 20$ (cm), więc

$$\frac{1}{2}|BD| = 10 \text{ (cm)}$$

Promień okręgu, który można opisać na czworokącie *EBFD*, jest równy 10 cm.

Twierdzenie 4. i twierdzenie 5. można zapisać następująco.

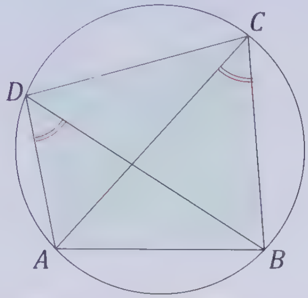
Twierdzenie 6.

Okrąg można opisać na czworokącie wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe (i wynoszą po 180°).

W rozwiązywaniu zadań przydatne też jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.

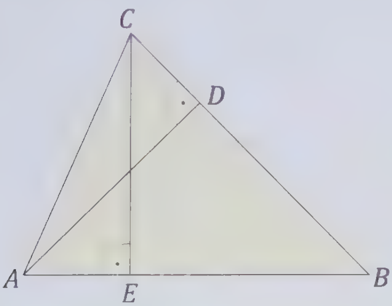
Okrąg można opisać na czworokącie $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ tworzą odpowiednio z bokami BC i AD kąty równe (tzn. $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$).



Przeprowadź dowód tego twierdzenia. (Pamiętaj, że dowód twierdzenia zapisanego w postaci równoważności składa się z dwóch części.)

Przykład 3.

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i CE. Wykażemy, że na czworokącie $AEDC$ można opisać okrąg.



Zauważmy, że przekątne AD i CE czworokąta $AEDC$ (czyli wysokości trójkąta ABC) są prostopadłe do przeciwległych boków tego czworokąta.

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle AEC| = 90^\circ$$

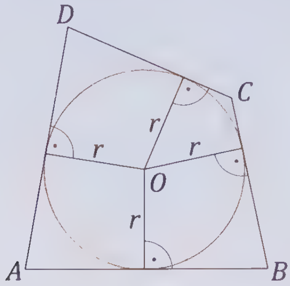
Zatem na mocy twierdzenia 7. na czworokącie $AEDC$ można opisać okrąg. Środkiem tego okręgu jest środek odcinka AC.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz kąty czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg, wiedząc, że $|\sphericalangle A| = 2|\sphericalangle B|$ oraz $|\sphericalangle B| + |\sphericalangle C| = 145^\circ$.
2. Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie, którego boki mają długość 3 cm i 4 cm.
3. Na kwadracie opisano okrąg. Oblicz długość boku kwadratu, jeśli łuk tego okręgu pomiędzy dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu ma długość π cm.
4. Na trapezie opisano okrąg o promieniu równym 13 cm. Środek tego okręgu znajduje się wewnątrz trapezu, w odległości 12 cm od krótszej podstawy i 5 cm od dłuższej podstawy. Oblicz długości boków trapezu.
5. W okrąg o średnicy długości 20 cm wpisano trapez. Dłuższa podstawa trapezu ma długość 16 cm, a wysokość trapezu jest równa 2 cm. Oblicz długość krótszej podstawy tego trapezu.

Okrąg wpisany w czworokąt

Okrąg jest wpisany w czworokąt (czworokąt jest opisany na okręgu) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy bok czworokąta jest styczny do okręgu.



Łatwo zauważyć, że środek okręgu wpisanego w czworokąt (wypukły) leży w równej odległości od boków czworokąta (równej promieniowi okręgu). Zatem środek okręgu należy do każdej dwusiecznej kąta rozpatrywanego czworokąta. Jak pamiętasz z klasy pierwszej – dwusieczna kąta jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ramion kąta. Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Jeśli okrąg można wpisać w czworokąt wypukły, to dwusieczne wszystkich kątów tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

Jeśli teraz założymy, że dwusieczne wszystkich kątów pewnego czworokąta (wypukłego) mają punkt wspólny, to – z własności dwusiecznych – punkt ten leży w równej odległości od boków czworokąta. Można zatem poprowadzić okrąg o środku w tym punkcie, styczny do wszystkich boków czworokąta. Otrzymujemy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Jeśli dwusieczne wszystkich kątów czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie, to w czworokąt ten można wpisać okrąg.

Ostatnie dwa twierdzenia można zapisać tak.

Twierdzenie 3.
Okrąg można wpisać w czworokąt wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie.

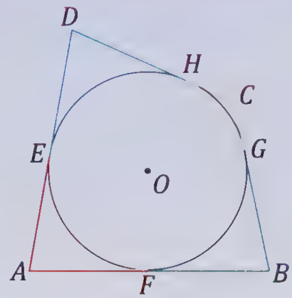
Podaj przykład czworokąta wypukłego, którego nie można opisać na okręgu.

Poznamy jeszcze inne cechy czworokąta, który można opisać na okręgu.

Twierdzenie 4.
Jeśli okrąg można wpisać w czworokąt wypukły, to sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe.

Założenie:

$ABCD$ – czworokąt wypukły opisany na okręgu
E, F, G, H – punkty styczności okręgu i czworokąta



Teza:

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$

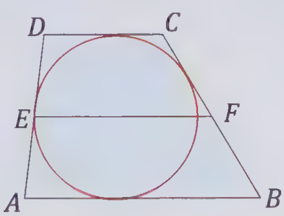
Dowód:
Z twierdzenia o odcinkach stycznych (poznałeś je w klasie pierwszej) wynika, że odcinki oznaczone tym samym kolorem mają taką samą długość. Rozpatrzmy sumę długości boków AB i CD:

$$|AB| + |CD| = |AF| + |FB| + |\quad| + |HD| = |AE| + |BG| + |\quad| + |ED| =$$
$$= |AE| + |ED| + |BG| + |GC| = |AD| + |BC|$$

Otrzymaliśmy, że suma długości boków AB i CD jest równa sumie długości boków AD i BC, co kończy dowód twierdzenia.

Przykład 1.

W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Obliczymy stosunek długości odcinka EF łączącego środki ramion tego trapezu do jego obwodu.



Obwód trapezu $ABCD$ jest równy:

$|AB| + |BC| + |CD| + |AD|$

Z twierdzenia 4. wynika, że

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$

Tak więc obwód trapezu możemy zapisać następująco:

$|AB| + |BC| + |CD| + |AD| = (|AB| + |CD|) + (|AD| + |BC|) = 2(|AB| + |CD|)$

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion wynika, że:

$|EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$

Obliczamy stosunek długości odcinka EF do obwodu trapezu

$$\frac{|EF|}{|AB|+|BC|+|CD|+|AD|}=\frac{\frac{1}{2}\left(|AB|+|CD|\right)}{2\left(|AB|+|CD|\right)}=\frac{1}{4}$$

Stosunek długości odcinka łączącego środki ramion trapezu, w który można wpisać okrąg, do obwodu tego trapezu jest wielkością stałą równą $\frac{1}{4}$.

Twierdzenie 5.
Jeśli sumy długości przeciwległych boków czworokąta wypukłego są równe, to w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Założenie:

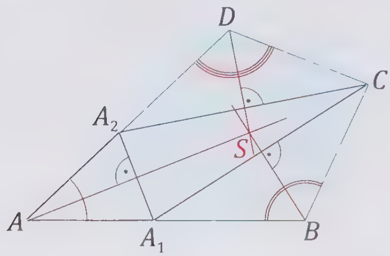
$ABCD$ – czworokąt wypukły

$|AB| + |DC| = |AD| + |CB|$

Teza:

w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg

Dowód: Wystarczy wykazać, że dwusieczne kątów czworokąta $ABCD$ przecinają się w jednym punkcie (zobacz twierdzenie 2.). Gdyby wszystkie boki czworokąta były równej długości, to czworokąt $ABCD$ byłby rombem. W rombie – jak wiemy – dwusieczne kątów wewnętrznych zawierają przekątne, które przecinają się w jednym punkcie, więc w romb można wpisać okrąg.



Załóżmy teraz, że czworokąt $ABCD$ nie jest rombem. Możemy przyjąć, że

$|AB| > |CB|$; wówczas $|AD| > |CD|$.

Na boku AB odkładamy taki odcinek A_1B, że

$|A_1B| = |CB|$,

a na boku AD taki odcinek A_2D, że

$|A_2D| = |DC|$ (zobacz rysunek obok).

W ten sposób otrzymujemy trzy trójkąty równoramienne: A_1BC, A_2CD i AA_1A_2. Trójkąt AA_1A_2 jest równoramienny, gdyż z założenia wynika, że:

$|AB| - |CB| = |AD| - |DC|$,

a z wyboru punktów A_1, A_2 wynika, że

$|AA_1| = |AB| - |CB|$

$|AA_2| = |AD| - |DC|$

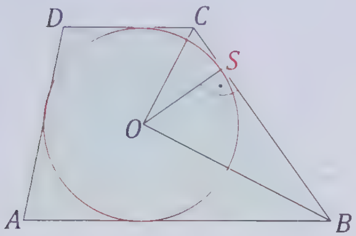
Prowadzimy teraz dwusieczne trzech kątów: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$. Ponieważ dwusieczna kąta między ramionami trójkąta równoramiennego zawiera się w symetralnej podstawy, więc dwusieczne kątów: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$ zawierają się w symetralnych boków trójkąta A_2A_1C. Symetralne boków trójkąta – jak pamiętasz z klasy pierwszej – przecinają się w jednym punkcie. Oznaczmy ten punkt przez S. Punkt S należy również do dwusiecznej $\sphericalangle C$ (dlaczego?). Odległości punktu S od wszystkich boków czworokąta $ABCD$ są równe, więc w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg i punkt S jest jego środkiem.

Twierdzenie 4. i 5. można zapisać następująco.

Twierdzenie 6.
Okrąg można wpisać w czworokąt wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta wypukłego są równe.

Przykład 2.

W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Ramię BC trapezu zostało podzielone przez punkt styczności S na takie odcinki CS i BS, że $|CS| = 2$ oraz $|BS| = 8$. Obliczymy promień okręgu wpisanego w trapez.



Niech punkt O będzie środkiem okręgu. Prowadzimy promień OS. Mamy

$OS \perp BC$ (dlaczego?)

Trójkąt COB jest trójkątem prostokątnym, ponieważ

$$|\sphericalangle OCB| + |\sphericalangle CBO| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DCB| + \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| =$$
$$= \frac{1}{2}\left(|\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle ABC|\right) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$

Zatem

$|\sphericalangle COB| = 90°$

Promień OS jest wysokością w trójkącie prostokątnym OBC, poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Na mocy twierdzenia – poznałeś je w klasie pierwszej – o wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, otrzymujemy

$|OS|^2 = |CS| \cdot |BS|$

$|OS|^2 = 2 \cdot 8 = 16$, więc

$|OS| = 4$, bo $|OS| > 0$

Promień okręgu wpisanego w trapez jest równy 4.

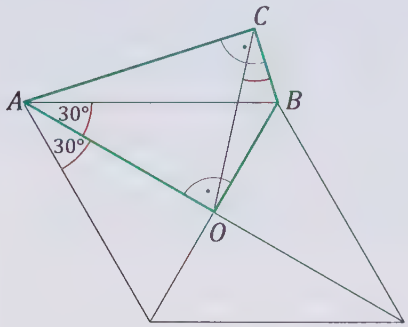
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Długość boku rombu jest równa 2,5 dm, a sinus kąta ostrego rombu jest równy 0,8. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten romb.
2. Iloczyn promienia okręgu wpisanego w kwadrat i promienia okręgu opisanego na tym kwadracie wynosi $\sqrt{2}$. Oblicz długość boku kwadratu.
3. Wykaż, że jeśli w równoległobok można wpisać okrąg, to ten równoległobok jest rombem.
4. W trapezie równoramiennym jedna podstawa jest trzy razy dłuższa od drugiej, a długość drugiej podstawy jest połową długości ramienia. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.

Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie

Przykład 1.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Przeciwprostokątna AB tego trójkąta jest jednocześnie bokiem rombu o kątach równych $60°$ i $120°$. Trójkąt prostokątny i romb leżą po przeciwnych stronach prostej AB. Z punktu C poprowadzono półprostą przez punkt O przecięcia się przekątnych rombu. Wykażemy, że półprosta $\overrightarrow{CO}$ podzieliła kąt ACB na kąty równe $30°$ i $60°$.



Niech rysunek obok ilustruje sytuację opisaną w zadaniu. Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, więc na czworokącie $AOBC$ można opisać okrąg, gdyż

$|\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle AOB| = 90° + 90° = 180°$
(tw. 5. str. 172)

Stąd wnioskujemy, że

$|\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle OAB|$ (tw. 7. str. 175), ale

$$|\sphericalangle OAB| = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$$

(przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych kątów wewnętrznych rombu).

Zatem

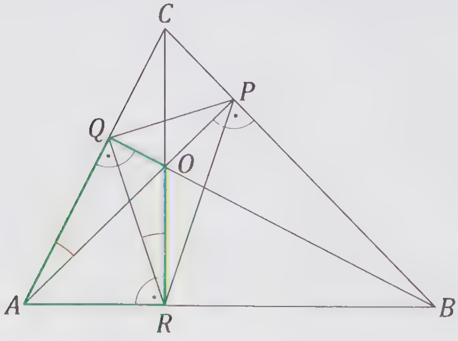
$|\sphericalangle OCB| = 30°$ i $|\sphericalangle OCA| = 60°$,

czyli półprosta $\overrightarrow{CO}$ dzieli kąt ACB na kąty równe $30°$ i $60°$.

Przykład 2.

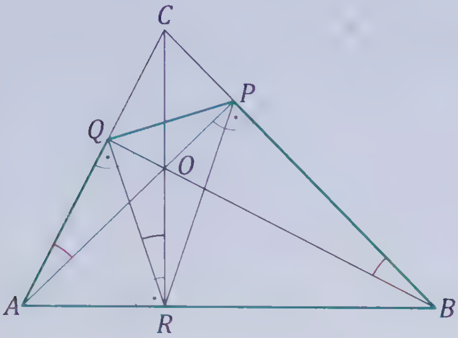
Punkty P, Q, R są spodkami wysokości w trójkącie ostrokątnym ABC. Wykażemy, że wysokości trójkąta ABC zawierają się w dwusiecznych kątów trójkąta PQR.

Na rysunku poniżej przedstawiony jest trójkąt ostrokątny ABC i jego spodki wysokości P, Q, R. Wykażemy, że wysokość CR zawiera się w dwusiecznej kąta QRP.



Zauważmy, że na czworokącie $AROQ$ można opisać okrąg (dlaczego?), zatem

(1) $|\sphericalangle QRO| = |\sphericalangle QAO|$
(twierdzenie 7. str. 175).

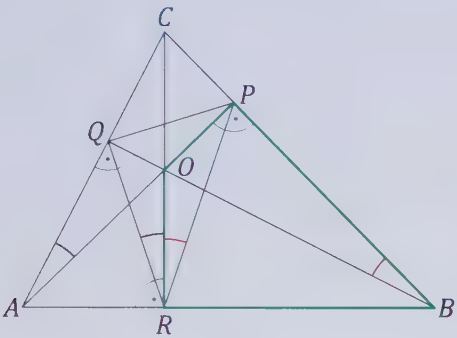


Na czworokącie $ABPQ$ można opisać okrąg, bo

$|\sphericalangle AQB| = |\sphericalangle APB|$

(twierdzenie 7. str. 175), zatem

(2) $|\sphericalangle QAO| = |\sphericalangle OBP|$



Na czworokącie $BPOR$ można opisać okrąg (dlaczego?), zatem

(3) $|\sphericalangle OBP| = |\sphericalangle ORP|$

Z równości (1), (2), (3) wynika, że

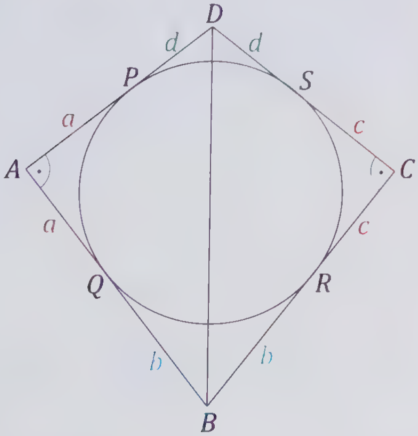
$|\sphericalangle QRO| = |\sphericalangle ORP|$,

a to znaczy, że wysokość CR trójkąta ABC zawiera się w dwusiecznej kąta QRP.

Postępując podobnie, wykaż, że wysokości AP i BQ zawierają się odpowiednio w dwusiecznych kątów RPQ oraz PQR.

Przykład 3.

W czworokąt $ABCD$, w którym $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle C| = 90°$, można wpisać okrąg. Wykażemy, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem lub deltoidem.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Punkty P, Q, R, S są punktami styczności okręgu i boków czworokąta. Oznaczmy dodatkowo długości odcinków (zgodnie z twierdzeniem o odcinkach stycznych):

$|AP| = |AQ| = a, \quad a > 0$

$|BQ| = |BR| = b, \quad b > 0$

$|CR| = |CS| = c, \quad c > 0$

$|DP| = |DS| = d, \quad d > 0$

Trójkąty ABD i BCD to trójkąty prostokątne mające wspólną przeciwprostokątną BD. Zatem z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do tych trójkątów wynika następująca równość:

$|AB|^2+|AD|^2=|CB|^2+|CD|^2$, skąd

$(a+b)^2+(a+d)^2=(c+b)^2+(c+d)^2$

$(a+b)^2-(c+b)^2+(a+d)^2-(c+d)^2=0$

Stosujemy dwukrotnie wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$(a+2b+c)(a-c)+(a+c+2d)(a-c)=0$

$(a-c)(2a+2b+2c+2d)=0$, więc

$a-c=0 \quad \vee \quad 2a+2b+2c+2d=0$

$a=c$ (równość sprzeczna)

Otrzymaliśmy więc, że

$|AP|=|AQ|=|CR|=|CS|$

Z tego wynika, że czworokąt $ABCD$ ma pary boków o równej długości.

$|AD|=|CD|=a+d$

$|AB|=|CB|=a+b$

Jeśli $b=d$, to czworokąt $ABCD$ jest kwadratem (zauważ, że wtedy również $a=b=d$); jeśli $b\neq d$, to czworokąt $ABCD$ jest deltoidem (jedyną osią symetrii tego czworokąta $ABCD$ jest prosta BD – uzasadnij to dokładnie).

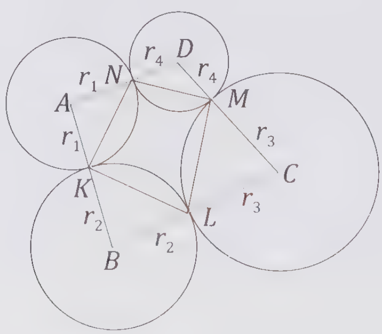
Przykład 4.

Na stole ułożono cztery różne, okrągłe monety tak, że każda dotyka dwóch sąsiednich. Wykażemy, że:

a) środki monet są wierzchołkami czworokąta, który można opisać na okręgu,

b) punkty styczności są wierzchołkami czworokąta, który można wpisać w okrąg.

Poniższy rysunek ilustruje sytuację opisaną w zadaniu.



Oznaczmy następująco okręgi reprezentujące monety:

$o(A,r_1)$, $o(B,r_2)$, $o(C,r_3)$, $o(D,r_4)$

Mamy udowodnić, że czworokąt $ABCD$ można opisać na okręgu, a czworokąt $KLMN$ można wpisać w okrąg.

Ad a) Rozpatrzmy najpierw czworokąt (wypukły) *ABCD*. Wystarczy wykazać – zgodnie z twierdzeniem 5. ze str. 178 – że sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe, tzn.:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

Okręgi są parami styczne zewnętrznie, zatem odległości miedzy ich środkami (a więc i długości boków czworokąta *ABCD*) są równe sumie odpowiednich promieni. Mamy więc:

$$|AB| = r_1 + r_2$$

$$|BC| = r_2 + r_3$$

$$|CD| = r_3 + r_4$$

$$|AD| = r_1 + r_4,$$

stąd

$$|AB| + |CD| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$|AD| + |BC| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

Tak więc rzeczywiście

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|,$$

co kończy dowód pierwszej części zadania.

Ad b) Wykażemy, że symetralne boków czworokąta *KLMN* przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ w czworokąt *ABCD* można wpisać okrąg, więc dwusieczne kątów tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie (twierdzenie 1. str. 176). Dwusieczne te zawierają się w symetralnych boków czworokąta *KLMN*. Wystarczy bowiem zauważyć, że trójkąty *AKN*, *BLK*, *CML*, *DNM* są równoramienne, czyli dwusieczne kątów o wierzchołkach *A*, *B*, *C*, *D* zawierają się odpowiednio w symetralnych boków *KN*, *LK*, *ML*, *NM*. Tak więc symetralne przecinają się w jednym punkcie, a zatem na czworokącie *KLMN* można opisać okrąg.

Spróbuj wykazać, że okrąg, który można opisać na czworokącie *KLMN*, jest jednocześnie okręgiem, który można wpisać w czworokąt *ABCD*.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*. Przeciwprostokątna *AB* jest jednocześnie bokiem kwadratu. Trójkąt prostokątny i kwadrat leżą po przeciwnych stronach prostej *AB*. Z punktu *C* poprowadzono półprostą przez punkt *O* przecięcia się przekątnych kwadratu. Wykaż, że półprosta $CO^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta *ACB*.

2. W trójkącie *ABC* kąt *A* jest rozwarty. Punkty *P*, *Q*, *R* są spodkami wysokości trójkąta *ABC*, przy czym punkt *R* jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka *C*. Wykaż, że prosta *AB* zawiera dwusieczną kąta *QRP* trójkąta *PRQ*.

Podobieństwo. Figury podobne

W klasie pierwszej powiedzieliśmy, że figury podobne to takie, które mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością. Dokładniej omówiliśmy podobieństwo trójkątów. Aby precyzyjniej wyjaśnić, na czym polega podobieństwo innych figur, przyjmiemy następujące definicje.

Definicja 1.

Podobieństwem nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które dowolnym dwóm różnym punktom A, B płaszczyzny przyporządkowuje takie punkty A_1, B_1, dla których

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = k,$$

gdzie k jest ustaloną (dla danego podobieństwa) liczbą dodatnią.
Liczbę k nazywamy **skalą podobieństwa**.

Definicja 2.

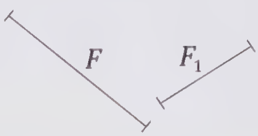
Figurami podobnymi nazywamy takie dwie figury geometryczne F i F_1, dla których istnieje podobieństwo przekształcające figurę F na figurę F_1.
Podobieństwo figur F i F_1 oznaczamy symbolicznie: $F \sim F_1$.

UWAGA: Trójkąty, które są podobne w myśl definicji 2., są również podobne w myśl definicji podanej w podręczniku do klasy pierwszej (definicja 1., str. 214).

Przykład 1.

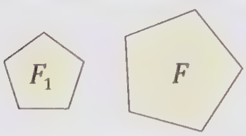
Figurami podobnymi są na przykład:

a) dwa (niezerowe) odcinki

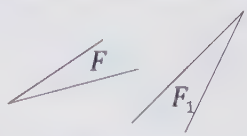


b) dwa koła

c) dwa pięciokąty foremne



d) dwa kąty o takich samych miarach



e) dwa wielokąty na rysunku poniżej

f) dwie figury na rysunku poniżej

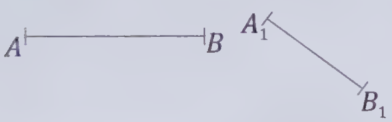
Zastanówmy się, jakie znaczenie ma skala podobieństwa. Łatwo zauważyć, że jeśli skala podobieństwa k jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, to odległość między dowolnymi punktami A, B będzie większa niż między ich obrazami A_1, B_1. O takim podobieństwie możemy powiedzieć, że „zmniejsza figury". Jeśli natomiast skala podobieństwa k jest liczbą z przedziału $(1, +\infty)$, to odległość między dowolnymi punktami A, B będzie mniejsza niż między ich obrazami A_1, B_1. Wówczas o takim podobieństwie powiemy, że „zwiększa figury".

A co będzie w przypadku, gdy skala podobieństwa jest równa 1? Wtedy odległość miedzy dowolnymi punktami A, B jest taka sama jak odległość między ich obrazami A_1, B_1. Takie przekształcenie geometryczne, które nie zmienia odległości między punktami, nazywamy **izometrią**. O izometrii możemy też powiedzieć inaczej, bardziej obrazowo, że zachowuje wielkość i kształt figur. Przykłady izometrii poznałeś w klasie pierwszej: przesunięcie równoległe, symetrię osiową, symetrię środkową. Tak więc izometria jest podobieństwem o skali 1.

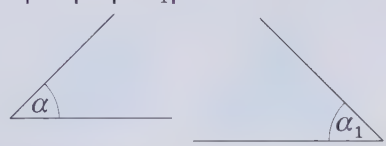
Przykład 2.

Wyznaczymy skalę podobieństwa, w którym:

a) obrazem odcinka AB jest odcinek A_1B_1, $|AB| = 15$ cm i $|A_1B_1| = 10$ cm



b) obrazem $\sphericalangle\alpha$ jest $\sphericalangle\alpha_1$ i $|\sphericalangle\alpha| = |\sphericalangle\alpha_1| = 45°$



Ad a) Aby wyznaczyć skalę tego podobieństwa, wystarczy znać długości dwóch odcinków odpowiadających sobie w tym podobieństwie (tzn. odcinka i obrazu tego odcinka w tym podobieństwie). Skala podobieństwa jest równa stosunkowi długości odcinka A_1B_1 do długości odcinka AB. Mamy więc:

$$k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|}, \text{ skąd } k = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

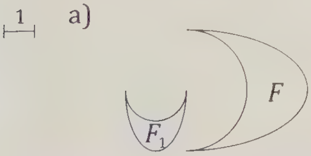
Skala podobieństwa jest równa $\frac{2}{3}$.

Ad b) W każdym podobieństwie obrazem kąta o mierze 45° jest kąt o mierze 45°. Zatem skalą podobieństwa może być każda liczba rzeczywista dodatnia.

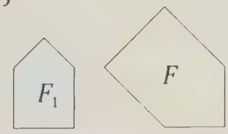
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na rysunku figura F_1 jest podobna do figury F. Na podstawie danych na rysunku podaj skalę tego podobieństwa.

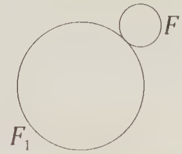
a)



b)

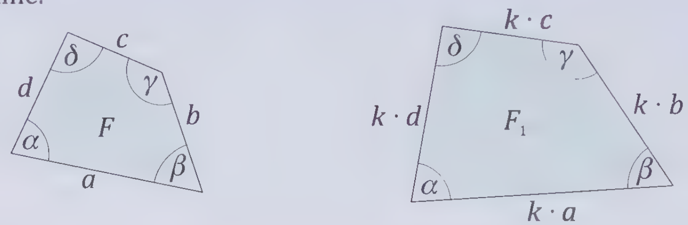


c)



Podobieństwo czworokątów

Z dotychczasowych rozważań dotyczących figur podobnych łatwo wywnioskować, że w czworokątach podobnych odpowiednie kąty są równe i odpowiednie boki proporcjonalne.

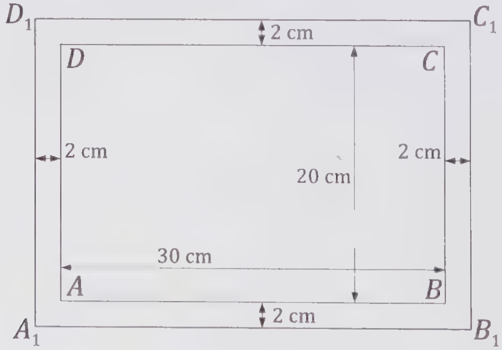


Skala podobieństwa przekształcającego czworokąt F na F_1 jest równa k.
Kolejne dwa przykłady będą dotyczyć podobieństwa prostokątów. W prostokątach wszystkie kąty są równe, więc badając podobieństwo tych figur, wystarczy skupić uwagę na długościach boków.

Przykład 1.

W siedzibie biura turystycznego zawieszono na ścianie zdjęcie o wymiarach 20 cm na 30 cm, oprawione w ramkę o szerokości 2 cm.

Czy prostokąty wyznaczone przez zdjęcie i zewnętrzny brzeg ramki są figurami podobnymi?
Niech rysunek poniżej przedstawia prostokąty, których dotyczy pytanie.



Aby sprawdzić, czy prostokąty $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ są podobne, wystarczy ustalić, czy prawdziwa jest równość $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$. Obliczamy:

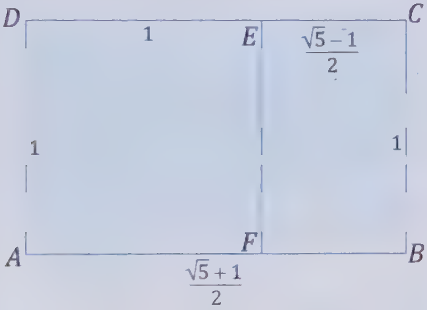
$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{34}{30} \ (\approx 1{,}13) \ \text{i} \ \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{24}{20} \ (= 1{,}2), \ \text{zatem}$$

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} \neq \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$$

Prostokąty te nie są podobne.

Przykład 2.

Boki prostokąta $ABCD$ mają długość 1 i $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Z tego prostokąta „odcięto" kwadrat o boku mającym długość 1 i otrzymano prostokąt $BCEF$ (patrz rysunek poniżej). Wykażemy, że prostokąt $BCEF$ jest podobny do prostokąta $ABCD$.



Mamy dane:

$$|AB| = |CD| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$|AD| = |BC| = 1$$

$$|DE| = |EF| = 1$$

Wymiary prostokąta $BCEF$ są następujące:

$$|EC| = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$|BC| = 1$$

Aby wykazać, że prostokąty $ABCD$ i $BCEF$ są podobne, wystarczy sprawdzić – zgodnie z tym, co stwierdziliśmy w ostatnim przykładzie – czy prawdziwa jest równość

$$\frac{|CD|}{|DA|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

Obliczamy:

$$\frac{|CD|}{|DA|} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{|BC|}{|EC|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

W obliczeniach wykorzystaliśmy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
Pokazaliśmy, że stosunki długości boków we wskazanych prostokątach są równe, więc te prostokąty są podobne.

Prostokąt, którego stosunek długości boków wyraża się liczbą $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, nazywa się „złotym prostokątem", a liczbę $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ nazywa się „złotą liczbą". Liczba złota wyraża taki podział odcinka, w którym stosunek długości dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi długości całego odcinka do części dłuższej (zobacz przykład 3. ze str. 123). Czasami liczbą złotą nazywa się odwrotność liczby $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, czyli liczbę $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
W starożytności uważano złoty podział za idealną proporcję („boska proporcja"). Bardzo chętnie był on stosowany w sztuce i w architekturze. Zdjęcie poniżej przedstawia fronton świątyni Ateny na Akropolu – Partenon.

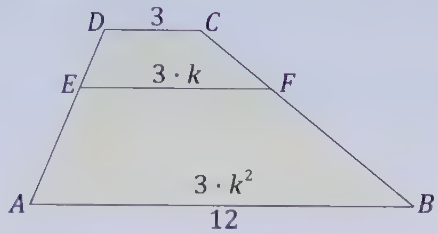
Fronton ten można „wpisać" w złoty prostokąt.

Kolejny przykład będzie dotyczyć podobieństwa trapezów.

Przykład 3.

W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, mamy dane długości boków: $|AB| = 12$, $|BC| = 9$, $|CD| = 3$, $|AD| = 6$. Poprowadzono odcinek EF łączący ramiona trapezu i równoległy do podstaw, który podzielił trapez $ABCD$ na dwa trapezy $ABFE$ i $EFCD$ podobne do siebie (patrz rysunek poniżej). Obliczymy:
a) skalę podobieństwa przekształcającego trapez $EFCD$ na trapez $ABFE$;

b) długości boków trapezu *EFCD*.



Ad a) Niech k oznacza szukaną skalę podobieństwa ($k > 0$). Krótsza podstawa EF trapezu $ABFE$ odpowiada krótszej podstawie DC trapezu $EFCD$ oraz

$|DC| = 3$, więc $|EF| = 3 \cdot k$

Dłuższa podstawa AB trapezu $ABFE$ odpowiada dłuższej podstawie EF trapezu $EFCD$ oraz

$|EF| = 3 \cdot k$, więc $|AB| = (3 \cdot k) \cdot k = 3 \cdot k^2$

Z treści zadania wiemy, że $|AB| = 12$, zatem

$3 \cdot k^2 = 12$, skąd

$k = 2 \vee k = -2$ (-2 nie spełnia warunku $k > 0$, bo $-2 < 0$)

Skala podobieństwa jest równa 2.

Ad b) Ramiona, które odpowiadają sobie w trapezach $ABFE$ i $EFCD$, to EA i DE oraz BF i FC (dlaczego?). Niech $|DE| = x$, wówczas $|EA| = 2x$ (ponieważ skala podobieństwa jest równa 2).

$|DE| + |EA| = |AD|$ i $|AD| = 6$, więc

$x + 2x = 6$, skąd

$x = 2$,

$|DE| = 2$

Podobnie obliczamy, że

$|FC| = 3$

Z punktu a) wynika, że

$|EF| = 3 \cdot 2 = 6$

Długości boków trapezu $EFCD$ są równe: $|EF| = 6$, $|FC| = 3$, $|CD| = 3$ i $|DE| = 2$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku AD. Na boku AB zaznaczono punkt K, a na boku DC – punkt L w taki sposób, że czworokąt $AKLD$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$.
   a) Wyznacz skalę tego podobieństwa.
   b) Oblicz $|AK| : |KB|$.
2. Wykaż, że jeśli kąt przecięcia przekątnych w jednym prostokącie jest taki sam, jak kąt przecięcia przekątnych w drugim prostokącie, to prostokąty są podobne.
3. Czy w trapezie $ABCD$ ($AB \| CD$) można poprowadzić odcinek KL taki, że $K \in AD$, $L \in BC$, $KL \| AB$, a trapez $KLCD$ jest podobny do trapezu $ABCD$? Odpowiedź uzasadnij.

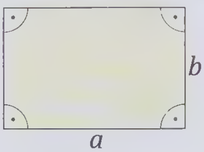
4. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

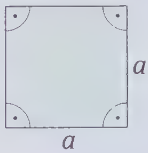
Przypomnij sobie z klasy pierwszej wiadomości dotyczące pola figury geometrycznej, a szczególnie własności pola (twierdzenie 1., str. 262, podręcznik, klasa 1.).

Twierdzenie 1.

1) Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch jego boków mających wspólny wierzchołek.
2) Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości jego boku.



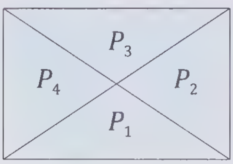
$P = a \cdot b$



$P = a^2$

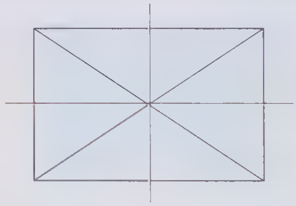
Zauważ, że przekątne prostokąta dzielą go na cztery trójkąty o równych polach (rys. a).

a)



$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

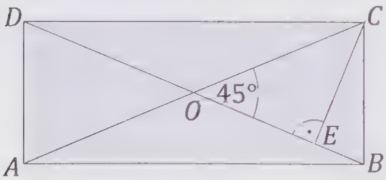
b)



Łatwo to można wykazać, jeśli – na przykład – poprowadzi się przez punkt przecięcia przekątnych proste równoległe do boków prostokąta. Te proste i przekątne dzielą dany prostokąt na osiem przystających trójkątów prostokątnych (rys. b).

Przykład 1.

Przekątne AC i BD prostokąta $ABCD$ przecinają się pod kątem 45°. Wiedząc dodatkowo, że $|AC| = |BD| = 12$ cm, obliczymy pole prostokąta $ABCD$.



Wiemy, że $|\sphericalangle BOC| = 45°$, $|OC| = |OB| = 6$ (cm). Aby rozwiązać zadanie, wystarczy obliczyć pole trójkąta OBC i otrzymany wynik pomnożyć przez cztery.

Prowadzimy wysokość CE w trójkącie OBC i obliczamy jej długość:

$$\frac{|CE|}{|OC|} = \sin 45°, \quad \text{skąd}$$

$$|CE| = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

Obliczamy pole trójkąta OBC:

$$P_{OBC} = \frac{1}{2}|OB| \cdot |CE|, \quad \text{więc}$$

$$P_{OBC} = 9\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$$

Pole trójkąta OBC możemy też obliczyć, bezpośrednio korzystając ze wzoru:

$$P_{OBC} = \frac{1}{2}|OB| \cdot |OC| \cdot \sin(\sphericalangle BOC)$$

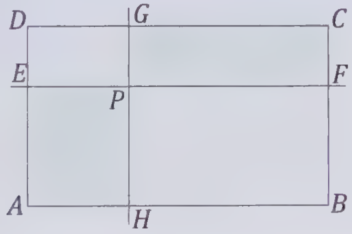
Na koniec wyznaczamy pole prostokąta $ABCD$:

$$P_{ABCD} = 4 \cdot P_{OBC} \quad \text{zatem} \quad P_{ABCD} = 36\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$$

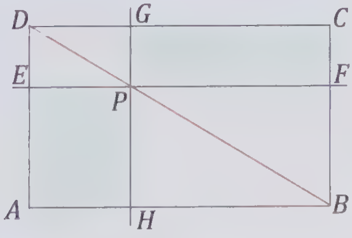
Pole prostokąta $ABCD$ jest równe $36\sqrt{2}$ cm^2.

Przykład 2.

Dany jest prostokąt $ABCD$. Przez dowolny punkt P leżący na przekątnej BD poprowadzono proste równoległe do boków prostokąta, które przecięły te boki odpowiednio w punktach E, F oraz G, H (patrz rysunek). Wykażemy, że pola prostokątów $AHPE$ i $PFCG$ są równe.



Zadanie łatwo będzie rozwiązać, jeśli dorysujemy przekątną BD prostokąta.



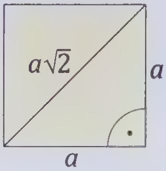
Wówczas zauważymy, że trójkąty ABD i CDB są przystające ($\Delta ABD \equiv \Delta CDB$), zatem mają równe pola. Podobnie:

$$\Delta BPH \equiv \Delta PBF \quad \text{oraz} \quad \Delta PDE \equiv \Delta DPG$$

Zatem pola prostokątów $AHPE$ i $PFCG$ są równe.

Przykład 3.

Przekątna kwadratu jest o 1 cm dłuższa od boku tego kwadratu. Obliczymy pole tego kwadratu.



Niech a oznacza długość boku kwadratu (w cm), wówczas przekątna tego kwadratu ma długość $a\sqrt{2}$. Wyznaczymy długość boku kwadratu. Z treści zadania wynika zależność:

$$a\sqrt{2} - a = 1, \quad \text{zatem}$$
$$a\left(\sqrt{2}-1\right) = 1 \quad /: \left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \quad \text{ponieważ}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1, \quad \text{więc}$$
$$a = \sqrt{2}+1$$

Obliczamy pole P kwadratu.

$P = a^2$, więc

$$P = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1 + 1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

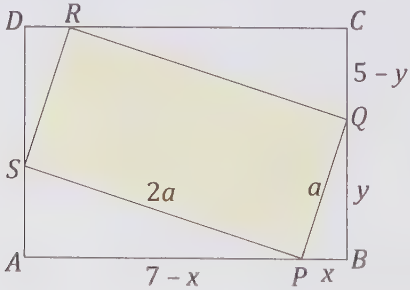
W obliczeniach wykorzystaliśmy wzory skróconego mnożenia: wzór na różnicę kwadratów i wzór na kwadrat sumy.

Pole kwadratu jest równe $\left(3+2\sqrt{2}\right)$ cm^2.

Przykład 4.

W prostokąt $ABCD$ o bokach mających długość 7 i 5 wpisano prostokąt $PQRS$ (tzn. do każdego boku prostokąta $ABCD$ należy jeden wierzchołek prostokąta $PQRS$). Stosunek sąsiednich boków w tym prostokącie jest równy 2 : 1. Obliczymy pole prostokąta $PQRS$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Mamy:

$|PQ| = a, \quad$ wówczas $\quad |PS| = 2a$

$|PB| = x, \quad$ wówczas $\quad |AP| = 7 - x$

$|BQ| = y, \quad$ wówczas $\quad |CQ| = 5 - y.$

Trójkąty PBQ i RDS są przystające oraz trójkąty APS i CRQ są przystające (uzasadnij to!), więc

$|DR| = x, \quad |DS| = y$ oraz

$|CR| = 7 - x, \quad |AS| = 5 - y.$

Trójkąty APS i BQP są podobne (uzasadnij to!), skala podobieństwa jest wyznaczona przez stosunek długości przeciwprostokątnych tych trójkątów

$$\frac{|SP|}{|PQ|} = 2$$

Zatem stosunek długości odpowiadających sobie przyprostokątnych w tych trójkątach też jest równy 2, więc:

$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{7-x}{y} = 2,$ skąd otrzymujemy równanie $x + 2y = 7$

$\frac{|AS|}{|PB|} = \frac{5-y}{x} = 2,$ skąd otrzymujemy równanie $2x + y = 5.$

Po rozwiązaniu układu równań $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ mamy $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ (sprawdź!).

Obliczamy pole P prostokąta $PQRS$.

$P = 2a^2$, ale $a^2 = x^2 + y^2$ (z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PBQ), więc $a^2 = 10$, czyli

$P = 20$

Pole prostokąta $PQRS$ jest równe 20.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. W prostokącie $ABCD$ przekątne AC i DB przecinają się w punkcie S. Pole trójkąta DSC jest równe 1 dm^2.
   a) Oblicz pole prostokąta.
   b) Wiedząc dodatkowo, że $|\sphericalangle BSC| = 30°$, wyznacz długość przekątnych prostokąta.

2. W kwadracie o polu 10 cm^2 połączono kolejno środki boków. Oblicz pole wyznaczonego w ten sposób czworokąta.

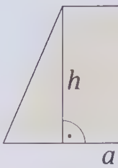
3. Różnica pól dwóch kwadratów jest równa 17. Oblicz długość boków kwadratów, wiedząc, że są one liczbami naturalnymi.

4. Punkt P należy do przekątnej DB prostokąta $ABCD$. Przez punkt P poprowadzono proste równoległe do boków prostokąta, które przecięły boki odpowiednio w punktach E, F oraz G, H (jak na rysunku w przykładzie 2.). Wiedząc, że pole prostokąta $PFCG$ jest równe 48 cm^2 oraz $|DP| : |PB| = 3 : 4$, oblicz pole prostokąta $ABCD$.

Pole równoległoboku. Pole rombu

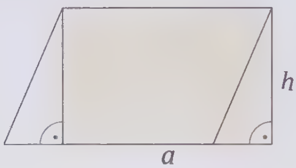
Przypomnimy wzór na pole równoległoboku.

Twierdzenie 1.
Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości poprowadzonej na ten bok.



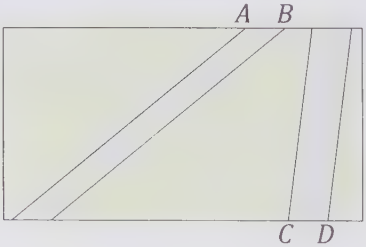
$$P = a \cdot h$$

Każdy równoległobok można podzielić na dwie części, z których można złożyć prostokąt o wymiarach a oraz h.



Przykład 1.

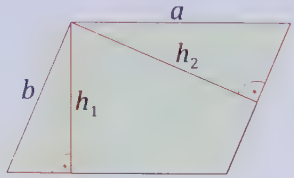
Na rysunku przedstawiono plan prostokątnej działki, przez którą prowadzą dwie drogi. Na planie obie drogi mają kształt równoległoboku i $|AB| = |CD|$. Odcinek której drogi zajmuje większą powierzchnię działki?



Obie drogi to równoległoboki, których krótsze boki mają taką samą długość. Wysokości obu równoległoboków poprowadzone na odcinki AB i CD mają taką samą długość jak krótszy bok działki; są więc równe. Zatem obie drogi mają taką samą powierzchnię (na obszarze działki).

Zobaczmy, jakie są zależności między bokami i wysokościami równoległoboku.

Rozważmy równoległobok, niebędący prostokątem, o bokach mających długość a, b ($a > b$). Z wierzchołka kąta rozwartego prowadzimy wysokości: h_1 – na bok mający długość a i h_2 – na bok mający długość b.



Wówczas

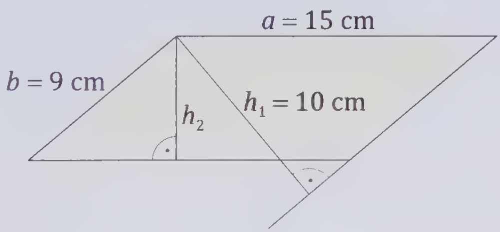
(1) $h_1 < h_2$ oraz

(2) $h_1 < b$ i $h_2 < a$

Nierówności (2) wynikają stąd, że wysokości wraz z bokami wyznaczają dwa trójkąty prostokątne (patrz rysunek), w których wysokości h_1 i h_2 są przyprostokątnymi, a boki równoległoboku są przeciwprostokątnymi. Tak więc w równoległoboku dłuższa wysokość jest krótsza od większego boku, a krótsza wysokość jest krótsza od mniejszego boku.

Przykład 2.

W równoległoboku boki mają długość 15 cm i 9 cm. Wiedząc, że jedna z wysokości ma 10 cm, obliczymy drugą wysokość.



Przyjmijmy oznaczenia:

$a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $h_1 = 10$ cm

Szukaną wysokość oznaczmy przez h_2.

Zauważ, że

$b < h_1$,

zatem h_2 jest krótszą wysokością równoległoboku (i $b > h_2$).

Wykorzystujemy wzór na pole P równoległoboku do wyznaczenia h_2:

$P = b \cdot h_1$ oraz $P = a \cdot h_2$

Przyrównujemy prawe strony wzorów i otrzymujemy równanie:

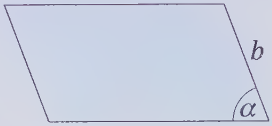
$9 \cdot 10 = 15 \cdot h_2$, skąd

$h_2 = 6$ (cm)

Druga wysokość równoległoboku ma 6 cm.

Twierdzenie 2.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości dwóch jego boków mających wspólny koniec i sinusa kąta tego równoległoboku.



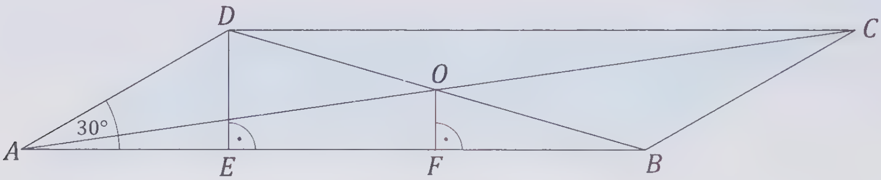
$$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Udowodnij to twierdzenie: poprowadź krótszą przekątną równoległoboku i wykorzystaj odpowiedni wzór na pole trójkąta.

Przykład 3.

W równoległoboku $ABCD$ kąt ostry jest równy 30°. Odległość punktu O przecięcia przekątnych od jednego z boków wynosi 1. Dłuższa przekątna ma długość 14. Obliczymy pole równoległoboku $ABCD$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Wiemy, że

$|\sphericalangle BAD| = 30°$ $\qquad |OF| = 1$ $\qquad |AC| = 14$

Poprowadźmy wysokość DE równoległoboku $ABCD$, równoległą do odcinka OF. Mamy więc

$DE \parallel OF$

Punkt O jest środkiem odcinka BD, więc odcinek OF łączy środki boków trójkąta EBD. Stąd

$|DE| = 2|OF|$, czyli $|DE| = 2$.

Obliczamy długość boku AD.

$\dfrac{|DE|}{|AD|} = \sin 30°$ $\qquad \dfrac{2}{|AD|} = \dfrac{1}{2}$, więc

$|AD| = 4$

Obliczamy długość boku CD. Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACD.

$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot \cos(\sphericalangle ADC)$

Oznaczmy $|CD|$ przez x ($x > 0$); otrzymujemy

$14^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos 150°$

$$196 = 16 + x^2 + 8 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 + 4\sqrt{3}x - 180 = 0$$

$$\Delta = 768 \qquad \sqrt{\Delta} = 16\sqrt{3}$$

$$x_1 = 6\sqrt{3} \qquad x_2 = -10\sqrt{3} \qquad x_2 < 0$$

Mamy więc

$$|CD| = |AB| = 6\sqrt{3}$$

Obliczamy pole P równoległoboku $ABCD$.

$$P = |AD| \cdot |AB| \cdot \sin 30°$$

$$P = 4 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 12\sqrt{3}$$

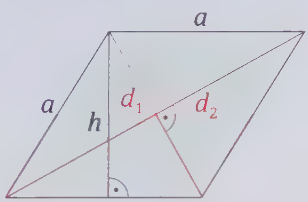
Oczywiście można też obliczyć pole równoległoboku $ABCD$, korzystając ze wzoru $P = |AB| \cdot |DE|$.

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe $12\sqrt{3}$.

Omówimy teraz wzory na pole rombu.

Twierdzenie 3.

Pole P rombu wyraża się wzorem:



1) $P = a \cdot h$, gdzie a jest długością boku, h – wysokością rombu

2) $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, gdzie d_1, d_2 są długościami przekątnych rombu.

Wzór 1) jest konsekwencją faktu, że romb jest równoległobokiem, natomiast wzór 2) wynika stąd, że przekątne rombu są prostopadłe i dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne, w których przyprostokątne mają długość $\frac{d_1}{2}$ oraz $\frac{d_2}{2}$.

Zatem pole takiego rombu jest równe:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}\right), \text{ czyli}$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

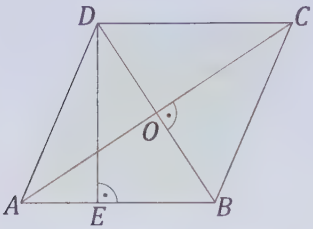
Przykład 4.

Przekątne rombu mają długość 30 cm i 40 cm. Obliczymy:

a) pole rombu

b) długość jego boku

c) wysokość rombu.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

$|AC| = 40$ cm

$|BD| = 30$ cm

$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

Obliczamy pole P rombu, korzystając z ostatniego twierdzenia (wzór 2).

$$P = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2}$$

$$P = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$$

Obliczamy długość boku $|AB|$ rombu. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AOB. Mamy

$$|AO| = \frac{1}{2}|AC| = 20$$

$$|OB| = \frac{1}{2}|BD| = 15 \text{ oraz}$$

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |OB|^2, \text{ skąd}$$

$$|AB|^2 = 20^2 + 15^2$$

$$|AB|^2 = 625, \text{ więc}$$

$$|AB| = 25, \text{ bo } |AB| > 0$$

Na koniec wyznaczamy wysokość DE. Wykorzystamy wzór 1) ostatniego twierdzenia:

$$P = |AB| \cdot |DE| \text{ i } P = 600, \text{ więc}$$

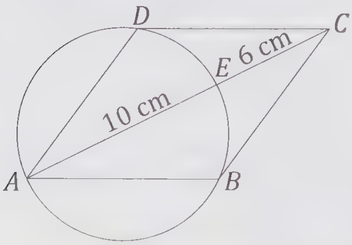
$$600 = 25 \cdot |DE|$$

$$|DE| = 24$$

Pole rombu jest równe 600 cm^2, bok ma długość 25 cm, a wysokość jest równa 24 cm.

Przykład 5.

Przez wierzchołek kąta ostrego rombu i dwa wierzchołki kątów rozwartych przechodzi okrąg. Dzieli on dłuższą przekątną na odcinki mające długość 10 cm i 6 cm. Obliczymy pole rombu.



Oznaczmy wierzchołki rombu literami A, B, C, D. Okrąg przechodzi przez wierzchołki A, B, D.

$|AE| = 10$ cm

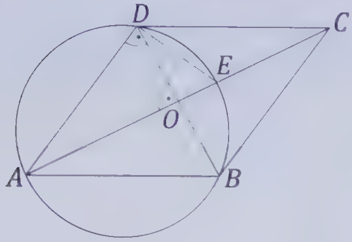
$|EC| = 6$ cm

Aby obliczyć pole rombu, wystarczy znać długości jego przekątnych.

Długość przekątnej AC łatwo obliczyć:

$$|AC| = 10 + 6 = 16$$

Wyznaczymy długość przekątnej BD. W tym celu dorysujmy przekątną BD. Punkt wspólny przekątnych oznaczmy literą O. Dorysujmy też odcinek DE.



Zauważ, że:

- odcinek AE jest średnicą okręgu (ponieważ AE zawiera się w symetralnej cięciwy BD)
- $|\sphericalangle ADE| = 90^\circ$ (ponieważ $\sphericalangle ADE$ jest kątem wpisanym opartym na półokręgu)
- odcinek DO jest wysokością w trójkącie prostokątnym AED poprowadzoną na przeciwprostokątną.

Obliczamy długość odcinka DO.

$|DO| = \sqrt{|AO| \cdot |OE|}$ (wzór ten poznałeś w klasie pierwszej)

$|AO| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

$|OE| = |AE| - |AO| = 10 - 8 = 2$

$|DO| = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

Obliczamy długość przekątnej BD.

$|BD| = 2|DO| = 2 \cdot 4 = 8$

Obliczamy pole P rombu $ABCD$.

$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$ $\qquad P = \frac{16 \cdot 8}{2} = 64$

Pole rombu jest równe 64 cm^2.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe 30. Na boku AB zaznaczono punkty K, M, a na boku DC – punkty L, N w taki sposób, że $KL \parallel MN \parallel BC$. Pola czworokątów $AKLD$ i $KMNL$ są odpowiednio równe 6 i 9. Oblicz $|AK| : |KM| : |MB|$.

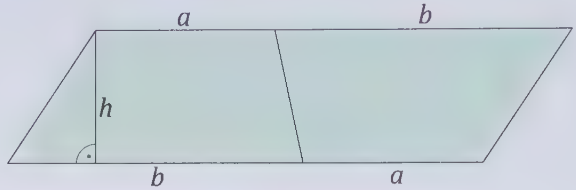
2. W równoległoboku $ABCD$ przekątne AC i DB przecinają się w punkcie S.
   a) Wykaż, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta ASD.
   b) Wiedząc dodatkowo, że pole trójkąta ASD jest o 15 cm^2 mniejsze od pola równoległoboku $ABCD$, oblicz pole tego równoległoboku.

3. Wysokości równoległoboku pozostają w stosunku 3 : 5, a jeden bok jest o 6 cm dłuższy od drugiego.
   a) Oblicz obwód równoległoboku.
   b) Wiedząc dodatkowo, że sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz pole równoległoboku i jego wysokości.

4. W rombie przekątne mają długość 6 cm i 8 cm. Oblicz:
   a) obwód i pole rombu $\qquad$ b) wysokość rombu.

Pole trapezu

Rozważmy trapez o podstawach mających długość a, b i wysokości h. Pole tego trapezu oznaczmy literą P. Z takich dwóch przystających trapezów można złożyć równoległobok.

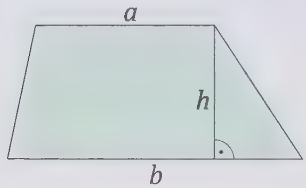


Pole równoległoboku jest równe $2P$, jak również $(a+b)\cdot h$, zatem

$$2P=(a+b)\cdot h \quad /:2 \qquad \text{stąd} \qquad P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Twierdzenie 1.

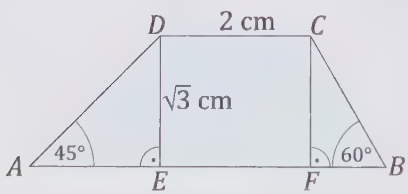
Pole P trapezu o podstawach mających długość a, b i wysokości h wyraża się wzorem:



$$P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Przykład 1.

Krótsza podstawa CD trapezu $ABCD$ ma długość 2 cm, a kąty przy podstawie AB mają miary 45° i 60°. Wysokość trapezu jest równa $\sqrt{3}$ cm. Obliczymy pole tego trapezu.



Mamy dane:

$AB \parallel CD, \quad |CD|=2$ cm

$|\sphericalangle EAD|=45°, \quad |\sphericalangle FBC|=60°$

Prowadzimy wysokości DE i CF

$|DE|=|CF|=\sqrt{3}$ cm

Obliczymy najpierw długość podstawy AB; następnie skorzystamy ze wzoru na pole trapezu.

Obliczamy długość odcinka AE.

$$\frac{|AE|}{|DE|}=\operatorname{ctg}(\sphericalangle EAD), \qquad \frac{|AE|}{\sqrt{3}}=\operatorname{ctg} 45°, \qquad \text{więc} \quad |AE|=\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}$$

Podobnie obliczamy długość odcinka FB

$$\frac{|FB|}{|CF|}=\operatorname{ctg}(\sphericalangle FBC), \qquad \frac{|FB|}{\sqrt{3}}=\operatorname{ctg} 60°, \qquad \text{więc} \quad |FB|=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1$$

Obliczamy długość podstawy AB.

$$|AB| = |AE| + |EF| + |FB|$$

$$|AB| = \sqrt{3} + 2 + 1 = 3 + \sqrt{3}$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$.

$$P = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot |DE|}{2}$$

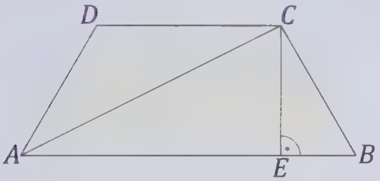
$$P = \frac{\left(3 + \sqrt{3} + 2\right) \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2}$$

Pole trapezu $ABCD$ jest równe $\frac{3+5\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

Czasami można obliczyć pole trapezu, nie znając długości podstaw.

Przykład 2.

Wysokość trapezu równoramiennego jest równa 7 cm, a przekątna tego trapezu ma długość 25 cm. Obliczymy pole tego trapezu.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$AB \parallel CD$, $|AD| = |BC|$

$|AC| = 25$ cm, $|CE| = 7$ cm

Znamy wysokość trapezu. Aby obliczyć jego pole, wystarczy wyznaczyć połowę sumy długości jego podstaw.

Rozważmy trójkąt prostokątny AEC. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta, wyznaczamy $|AE|$.

$|AE|^2 + |CE|^2 = |AC|^2$, więc $|AE|^2 + 7^2 = 25^2$, skąd

$|AE| = 24$, $|AE| > 0$

Zauważ, że

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$$ (zobacz twierdzenie 4., str. 161)

Obliczamy pole trapezu.

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |CE|$$

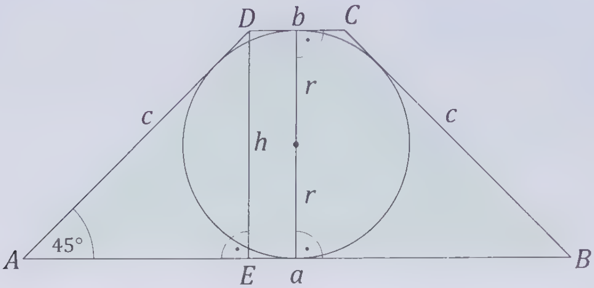
$$P = 24 \cdot 7 = 168$$

Pole trapezu jest równe 168 cm^2.

Przykład 3.

Pole trapezu równoramiennego opisanego na okręgu jest równe $8\sqrt{2}$. Wyznaczymy długość ramienia tego trapezu, jeśli jest ono nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 45°.

Niech na rysunku poniżej będzie przedstawiony trapez równoramienny $ABCD$, $AB \parallel CD$, $|AD| = |BC|$.



Ponadto oznaczmy

$|AB| = a \qquad |CD| = b \qquad |AD| = |BC| = c$

r – promień okręgu wpisanego w trapez

$|DE| = h$

Mamy

$|DE| = 2r$

Pole P trapezu opisuje wzór

$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, z warunków zadania wiemy, że $P = 8\sqrt{2}$.

Ponieważ trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc (na mocy twierdzenia 4 ze str. 177) otrzymujemy

$a + b = 2c$, zatem

$P = c \cdot 2r$

Trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym, więc

$\frac{|DE|}{|AD|} = \sin 45°$

$\frac{2r}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, skąd

$r = \frac{c}{2\sqrt{2}}$, więc

$P = c \cdot 2 \cdot \frac{c}{2\sqrt{2}} = \frac{c^2}{\sqrt{2}}$ i $P = 8\sqrt{2}$, zatem otrzymujemy równanie

$8\sqrt{2} = \frac{c^2}{\sqrt{2}} \quad / \cdot \sqrt{2}$

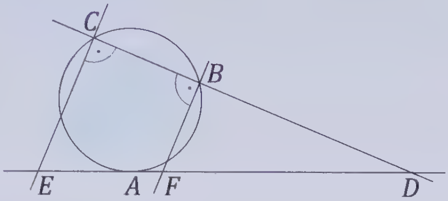
$16 = c^2$

$c = 4$, bo $c > 0$.

Długość ramienia trapezu jest równa 4.

Przykład 4.

Poprowadzono dwie proste – styczną do danego okręgu w punkcie A i sieczną tego okręgu, która przecięła okrąg w punktach B i C. Proste przecięły się w punkcie D (zobacz rysunek poniżej). Przez punkty C i B poprowadzono proste prostopadłe do prostej BC, które przecięły prostą AD odpowiednio w punktach E i F. Wiedząc, że $|AD| = 12\sqrt{6}$, $|ED| = 39$ oraz $|BC| = 12$:



a) obliczymy pole trapezu $BCEF$,
b) wykażemy, że w trapez $BCEF$ można wpisać okrąg.

Ad a) Obliczamy długość odcinka BD. Wykorzystamy twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej (poznałeś je w klasie pierwszej).

$$|BD| \cdot |CD| = |AD|^2$$

Oznaczmy $|BD|$ przez x, $x > 0$. Otrzymujemy

$$x(12 + x) = \left(12\sqrt{6}\right)^2, \quad \text{czyli} \quad x^2 + 12x - 864 = 0, \quad \text{skąd}$$

$$x_1 = 24 \qquad x_2 = -36, \; -36 < 0$$

Zatem $|BD| = 24$.

Obliczamy długość podstawy CE trapezu $BCEF$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego EDC i otrzymujemy

$$|CE| = 15$$

Obliczamy długość podstawy BF trapezu $BCEF$. Zauważmy, że

$\Delta BFD \sim \Delta CED$ (uzasadnij to), zatem

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|BF|}{|BD|} \qquad \frac{15}{36} = \frac{|BF|}{24}, \quad \text{więc} \quad |BF| = 10.$$

Obliczmy pole P trapezu $BCEF$.

$$P = \frac{|BF| + |CE|}{2} \cdot |BC| \qquad P = \frac{10 + 15}{2} \cdot 12 = 150$$

Pole trapezu $BCEF$ jest równe 150.

Ad b) Wystarczy pokazać zgodnie z twierdzeniem 5 ze str. 178 – że

$$|BF| + |CE| = |BC| + |EF|$$

Aby wyznaczyć $|EF|$ – pozostałe długości już znamy – obliczamy najpierw długość odcinka FD:

$|FD| = 26$ (sprawdź!). Ponieważ $|EF| = |ED| - |FD| = 39 - 26 = 13$, więc

$$|BF| + |CE| = 10 + 15 = 25 \qquad |BC| + |EF| = 12 + 13 = 25$$

A to znaczy, że w trapez $BCEF$ można wpisać okrąg.

Sprawdź, czy rozumiesz

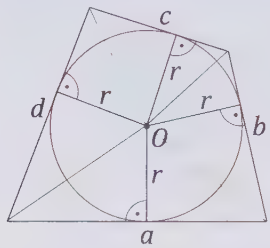
1. W trapezie prostokątnym krótsze ramię ma długość 5 cm. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 6 cm. Oblicz pole trapezu.

2. Pole trapezu jest równe 21 cm^2, a wysokość jest równa 7 cm. Oblicz długości podstaw trapezu, jeśli jedna z nich jest o 3 cm dłuższa od drugiej.

Pole czworokąta – zadania różne

Zastanówmy się, jak obliczyć pole czworokąta, jeżeli nie możemy skorzystać z własności równoległoboku ani z własności trapezu. Często dzielimy dany czworokąt na figury, których pola potrafimy obliczyć, na przykład na trójkąty. Możemy również obliczyć pole figury zawierającej dany czworokąt i odjąć pola figur, o które uzupełniliśmy naszą figurę. Bardzo przydatne mogą się okazać własności dotyczące pól czworokątów, które tu omówimy. Pierwsza dotyczy czworokątów, w które można wpisać okrąg.

Niech dany będzie czworokąt (wypukły) o bokach mających długość: a, b, c, d, w który wpisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu r. Wyznaczymy pole tego czworokąta.



Odcinki poprowadzone ze środka okręgu do wierzchołków czworokąta dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty. W każdym trójkącie jeden bok jest bokiem czworokąta, a wysokość trójkąta poprowadzona na ten bok jest równa promieniowi okręgu wpisanego w czworokąt.

Pole P czworokąta jest równe sumie pól tych czterech trójkątów:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot + \frac{1}{2}d \cdot r$$

$$P = r \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$$

Można to zapisać też tak:

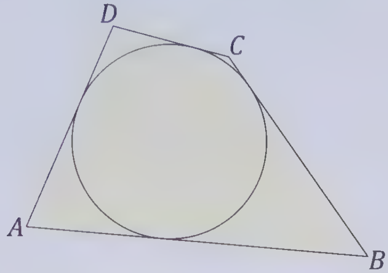
$$P = r \cdot p, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.
Jeśli w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to pole tego czworokąta jest równe iloczynowi promienia okręgu wpisanego w ten czworokąt i połowy obwodu czworokąta.

Przykład 1.

W czworokąt $ABCD$ wpisano koło, którego pole jest równe 49π cm^2. Wiadomo, że $|AB| + |CD| = 53$ cm. Obliczymy pole czworokąta $ABCD$.



Niech P_k oznacza pole koła wpisanego w czworokąt $ABCD$, r – promień koła (w cm), $r > 0$;

$|AB| + |CD| = 53$ cm

Ze wzoru na pole koła obliczamy r.

$P_k = \pi r^2$, więc $49\pi = \pi r^2$

$r = 7 \vee r = -7$ (liczba -7 nie spełnia warunku $r > 0$)

Z twierdzenia o wpisywalności okręgu w czworokąt wynika, że

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$

Zatem suma $|AB| + |CD|$ jest równa połowie obwodu czworokąta.

$\frac{1}{2}Obw = 53$ (cm)

Na podstawie ostatniego twierdzenia obliczamy pole P czworokąta $ABCD$.

$P = \frac{1}{2}Obw \cdot r$

$P = 53 \cdot 7 = 371$ (cm^2)

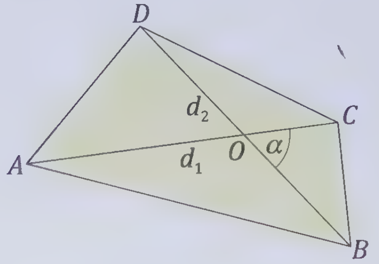
Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 371 cm^2.

Ostatnie twierdzenie można uogólnić na dowolny wielokąt wypukły, w który można wpisać okrąg. Spróbuj udowodnić twierdzenie 2.

Twierdzenie 2.

Jeśli w wielokąt wypukły można wpisać okrąg, to pole tego wielokąta jest równe iloczynowi promienia okręgu wpisanego w ten wielokąt i połowy obwodu wielokąta.

Rozważmy czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne AC i BD przecinają się pod kątem α. Przyjmijmy dodatkowo, że przekątne czworokąta przecinają się w punkcie O oraz że $|AC| = d_1$ i $|BD| = d_2$. Wyznaczymy pole czworokąta $ABCD$ w zależności od d_1, d_2 i α.



Zauważmy, że przekątne dzielą czworokąt na cztery trójkąty (o rozłącznych wnętrzach):

ABO, *BCO*, *CDO* i *DAO*.

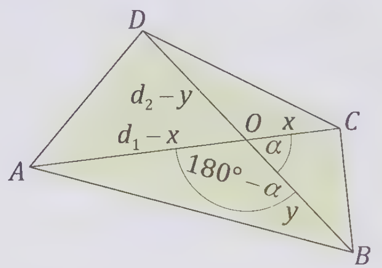
Suma pól tych trójkątów jest równa polu czworokąta *ABCD*.

Pola trójkątów policzymy, stosując twierdzenie (znane Ci z pierwszej klasy): pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków trójkąta i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.

Aby ułatwić obliczenia, wprowadźmy jeszcze oznaczenia pomocnicze:

$|OC| = x$ i $|OB| = y$.

Na rysunku poniżej zaznaczyliśmy interesujące nas długości boków czterech wskazanych trójkątów.



Obliczamy pole czworokąta *ABCD*.

$$P_{ABCD} = P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CDO} + P_{DAO}$$

Zatem

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (d_1 - x) \cdot y \cdot \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot x \cdot (d_2 - y) \cdot \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot (d_1 - x) \cdot (d_2 - y) \cdot \sin\alpha$$

Korzystamy ze wzoru redukcyjnego $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, następnie wyłączamy przed nawias wyrażenie $\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha$.

Otrzymujemy

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha[(d_1 - x)y + xy + x(d_2 - y) + (d_1 - x)(d_2 - y)]$$

W nawiasie kwadratowym wykonujemy mnożenie i przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

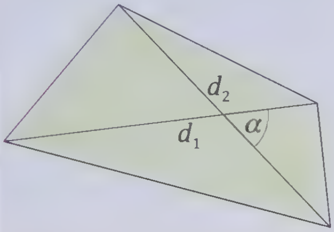
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha[d_1y - xy + xy + xd_2 - xy + d_1d_2 - d_1y - xd_2 + xy]$$

Ostatecznie otrzymaliśmy, że

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$$

Otrzymany rezultat zapiszemy w postaci twierdzenia.

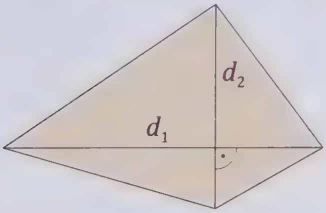
Twierdzenie 3.
Jeśli przekątne czworokąta wypukłego mają długość d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem α, to pole P tego czworokąta wyraża się wzorem:



$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$$

Z twierdzenia 3. łatwo jest wyprowadzić następujący wniosek.

Wniosek:
Jeśli przekątne czworokąta wypukłego mają długość d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem prostym, to pole P tego czworokąta wyraża się wzorem:



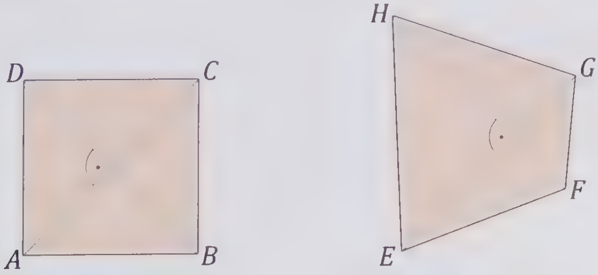
$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$

Przykład 2.

Zbudujemy czworokąt *EFGH* niebędący trapezem, którego pole będzie równe polu danego kwadratu *ABCD*.

Wiemy, że kwadrat ma przekątne równej długości, przecinające się pod kątem prostym. Wystarczy więc – na mocy ostatniego wniosku – zbudować czworokąt, którego przekątne będą mieć długość jak przekątne kwadratu i będą do siebie prostopadłe.

Rysunek poniżej przedstawia kwadrat *ABCD* i przykładowy czworokąt *EFGH*.



Przykład 3.

Obliczymy pole czworokąta $ABCD$, którego przekątne przecinają się pod kątem 73° oraz mają odpowiednio długość 10 cm i 19 cm. Wynik podamy z dokładnością do 0,01 cm^2.

Korzystamy z twierdzenia 1., aby obliczyć pole P czworokąta $ABCD$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 19 \cdot \sin 73° =$$

$$= 95 \cdot \sin 73° = 90{,}8489... \approx 90{,}85 \left(\mathrm{cm}^2\right)$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe w przybliżeniu 90,85 cm^2.

Przykład 4.

Rozpatrujemy czworokąty, których przekątne przecinają się pod kątem 30°. Suma długości przekątnych każdego czworokąta jest równa 12 cm. Ile jest równe największe pole takiego czworokąta?

Przyjmijmy oznaczenia:

x, y – długości przekątnych czworokąta

$x + y = 12$

$P = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 30°$ – pole czworokąta, $y = 12 - x$, więc

$P(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (12 - x) \cdot \frac{1}{2}$, czyli

$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x, \quad D = (0, 12)$

Otrzymaliśmy funkcję opisującą pole P czworokąta w zależności od długości jego przekątnej. Dziedziną funkcji jest przedział $(0, 12)$.

Funkcja $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ w zbiorze $\boldsymbol{R}$ osiąga największą wartość dla argumentu 6.

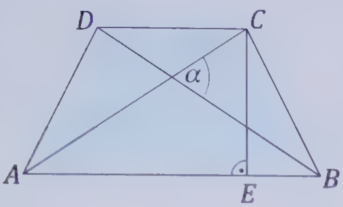
Zauważmy, że $6 \in (0, 12)$, zatem pole P czworokąta będzie największe również dla argumentu 6. Obliczamy

$$P(6) = -\frac{1}{4} \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 = -9 + 18 = 9 \left(\mathrm{cm}^2\right)$$

Największe pole czworokąta jest równe 9 cm^2.

Przykład 5.

Pole trapezu równoramiennego jest równe 120 cm^2. Suma długości podstaw tego trapezu jest równa 30 cm. Wyznaczymy (w przybliżeniu) kąt, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.



Niech dany będzie trapez równoramienny $ABCD$, $AB \parallel CD$, $|AD| = |BC|$, CE – wysokość trapezu, $\sphericalangle\alpha$ – kąt między przekątnymi (rysunek obok). Wiemy, że

$$|AB| + |CD| = 30 \text{ (cm)}$$

$$P = 120 \left(\text{cm}^2\right)$$

gdzie P – pole trapezu

Wyznaczamy $|CE|$.

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |CE|$$

$$120 = \frac{30}{2} \cdot |CE|, \quad \text{skąd}$$

$$|CE| = 8 \text{ (cm)}$$

Obliczamy długość przekątnej trapezu. W tym celu zauważmy, że

$|AE| = \dfrac{|AB| + |CD|}{2}$ (twierdzenie 4., str. 161), więc $|AE| = 15$ (cm)

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AEC obliczamy $|AC|$

$$|AC|^2 = |AE|^2 + |CE|^2$$

$$|AC|^2 = 15^2 + 8^2, \quad \text{czyli}$$

$$|AC|^2 = 289, \quad \text{więc}$$

$$|AC| = 17 \text{ cm} \quad (\text{bo } |AC| > 0)$$

Obliczamy $\sin\alpha$. Korzystamy z twierdzenia 1.

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha \qquad |AC| = |BD| = 17 \text{ (cm)}, \qquad \text{więc}$$

$$120 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 17 \cdot \sin\alpha, \qquad \text{skąd}$$

$$\sin\alpha = \frac{240}{289} \ (\approx 0{,}8304)$$

Posługując się tablicami matematycznymi lub kalkulatorem, wyznaczamy α.

$$\alpha \approx 56^\circ$$

Kąt, pod jakim przecinają się przekątne trapezu, ma miarę ok. 56°.

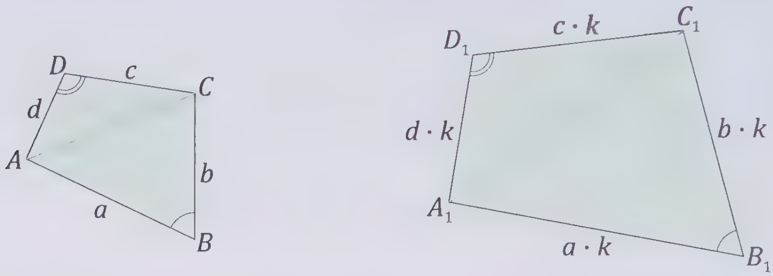
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz pole czworokąta, którego przekątne mają długość $\sqrt[4]{12}$ dm oraz $\sqrt[4]{27}$ dm i przecinają się pod kątem 45°.
2. Wyznacz miarę kąta ostrego między przekątnymi czworokąta wypukłego, jeśli długości przekątnych czworokąta mają długość 10 cm każda, a pole czworokąta wynosi 25 cm^2.
3. Jakie może być największe pole czworokąta wypukłego, którego przekątne mają długość 6 cm i 8 cm? Odpowiedź uzasadnij.

Pola figur podobnych

W klasie pierwszej poznałeś zależność dotyczącą pól trójkątów podobnych. Przypomnijmy ją.
Niech trójkąt $A_1B_1C_1$ będzie podobny do trójkąta ABC w skali k. Wówczas stosunek pola trójkąta $A_1B_1C_1$ do pola trójkąta ABC jest równy kwadratowi skali podobieństwa: $\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k^2$.

Pokażemy, że taką własność mają czworokąty podobne. Załóżmy, że mamy dane dwa czworokąty: $ABCD$ i podobny do niego w skali k czworokąt $A_1B_1C_1D_1$.



Wówczas odpowiednie kąty w tych czworokątach są równe i odpowiednie długości boków proporcjonalne. W szczególności:

$$|\sphericalangle D| = |\sphericalangle D_1| \quad \text{i} \quad \frac{|A_1D_1|}{|AD|} = \frac{|D_1C_1|}{|DC|} = k,$$

więc (na mocy cechy bkb podobieństwa trójkątów) trójkąt $A_1C_1D_1$ jest podobny do trójkąta ACD w skali k, zatem

$$\frac{P_{A_1C_1D_1}}{P_{ACD}} = k^2, \text{ czyli}$$

$$P_{A_1C_1D_1} = k^2 \cdot P_{ACD}$$

Analogicznie

$$|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1| \quad \text{i} \quad \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = k,$$

więc trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali k.

$$\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k^2, \text{ czyli}$$

$$P_{A_1B_1C_1} = k^2 \cdot P_{ABC}$$

Zapisujemy pole czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ w postaci sumy pól dwóch trójkątów $A_1C_1D_1$ i $A_1B_1C_1$:

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = P_{A_1C_1D_1} + P_{A_1B_1C_1} = k^2 \cdot P_{ACD} + k^2 \cdot P_{ABC} = k^2(P_{ACD} + P_{ABC}) = k^2 \cdot P_{ABCD},$$

skąd otrzymujemy, że

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}} = k^2$$

Zatem stosunek pól czworokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

W przypadku innych wielokątów podobnych wniosek dotyczący ich pól będzie taki sam. Wielokąty takie można bowiem podzielić na trójkąty odpowiednio podobne i przeprowadzić analogiczne rozumowanie. Można też udowodnić ogólniejsze twierdzenie dotyczące pól figur podobnych.

Twierdzenie 1.
Stosunek pól figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 1.

Figura F_1 jest podobna do figury F w skali 0,4. Suma pól figur F i F_1 jest równa 145 cm^2. Wyznaczymy pole figury F_1.

Przyjmujemy oznaczenia:

P_F – pole figury F

P_{F_1} – pole figury F_1

$k = 0{,}4$ – skala podobieństwa

Z treści zadania wynika, że

(1) $P_F + P_{F_1} = 145$

Z ostatniego twierdzenia wnioskujemy, że

$$\frac{P_{F_1}}{P_F} = k^2, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{P_{F_1}}{P_F} = 0{,}4^2$$

(2) $P_{F_1} = 0{,}16 \cdot P_F$

Z równań (1) i (2) wynika równanie:

$$P_F + 0{,}16 \cdot P_F = 145,$$

skąd otrzymujemy

$$P_F = 125 \left(\text{cm}^2\right)$$

Obliczamy pole figury F_1.

$$P_{F_1} = 145 - 125 = 20 \left(\text{cm}^2\right)$$

Pole figury F_1 jest równe 20 cm^2.

Przykład 2.

Pole kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ jest o 69% większe od pola kwadratu $ABCD$. Obliczymy skalę podobieństwa kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ do kwadratu $ABCD$.

Niech p oznacza pole kwadratu $ABCD$, k – szukaną skalę podobieństwa, $k > 0$. Wówczas pole kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ jest równe

$$p + 69\%p = 1{,}69p$$

Stosunek pól kwadratów: $A_1B_1C_1D_1$ i $ABCD$ jest równy

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}} = \frac{1{,}69p}{p} = 1{,}69$$

Z drugiej strony – na mocy ostatniego twierdzenia

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}} = k^2, \quad \text{więc}$$

$$k^2 = 1{,}69, \quad \text{skąd}$$

$k = 1{,}3 \vee k = -1{,}3$ (liczba $-1{,}3$ nie spełnia warunku $k > 0$, bo $-1{,}3 < 0$)

Skala podobieństwa jest równa 1,3.

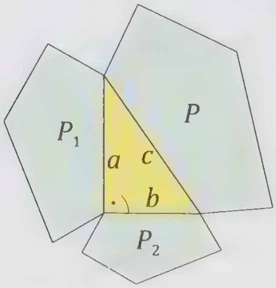
Z polami figur podobnych ma związek znane Ci bardzo dobrze twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie to poznałeś w postaci: „Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych". Okazuje się, że można je sformułować też tak:

„Jeżeli trójkąt jest prostokątny i na bokach tego trójkąta zbudujemy figury podobne, to pole figury zbudowanej na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól figur zbudowanych na przyprostokątnych".

Tymi figurami podobnymi mogą być oczywiście kwadraty, ale mogą też być inne figury podobne.

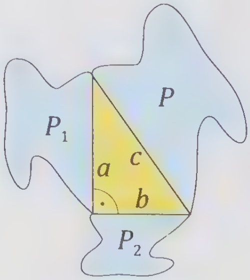
Na rysunkach poniżej mamy trójkąt prostokątny o bokach mających długość a, b, c i zbudowane na jego bokach figury podobne (mają ten sam kolor). Pola odpowiednich figur podobnych zostały oznaczone: P, P_1, P_2.

1.



$P = P_1 + P_2$

2.



$P = P_1 + P_2$

Wykażemy, że równość $P = P_1 + P_2$ jest prawdziwa w przypadku dowolnych figur podobnych.

Skala podobieństwa dwóch figur jest wyznaczona na przykład przez stosunek długości odpowiadających sobie odcinków w tych figurach, a stosunek pól figur podobnych jest równy – na mocy twierdzenia 1. – kwadratowi skali podobieństwa. Zatem

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \text{ skąd } P_2 = P_1 \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

Podobnie

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \text{ skąd } P = P_1 \cdot \frac{c^2}{a^2}$$

Zatem

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_1 \cdot \frac{b^2}{a^2} = P_1 \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = P_1 \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} = P_1 \cdot \frac{c^2}{a^2} = P, \quad \text{czyli}$$

$$P_1 + P_2 = P$$

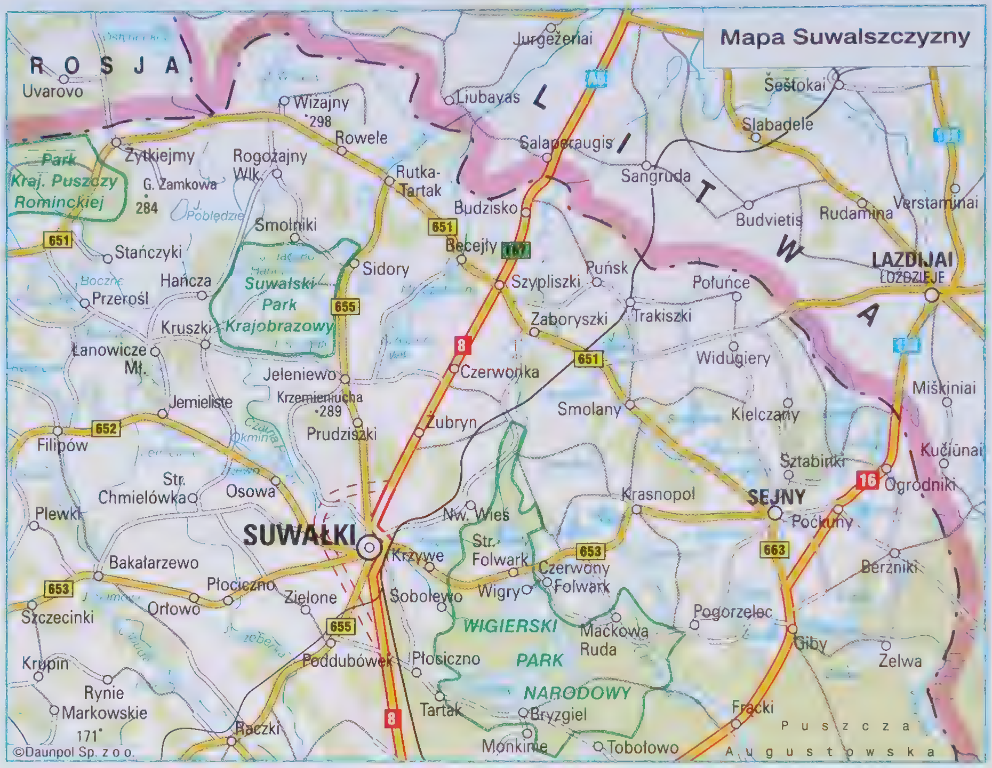
Równość $a^2 + b^2 = c^2$ jest tezą „zwykłego" twierdzenia Pitagorasa.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali k. Wiedząc, że pole figury F stanowi 0,16 pola figury F_1, oblicz k.
2. Skala podobieństwa koła K_1 do koła K wynosi 0,9. O ile procent pole koła K_1 jest mniejsze od pola koła K?
3. Figury F_1 i F są podobne. Obwód figury F_1 jest o 15% większy od obwodu figury F. O ile procent pole figury F_1 jest większe od pola figury F?
4. W trapezie $ABCD$ odcinki AB i DC są podstawami. Pole trapezu $ABCD$ jest równe 130 cm^2. Na ramieniu AD zaznaczono punkt E, a na ramieniu BC – punkt F w taki sposób, że trapez $EFCD$ jest podobny do trapezu $ABFE$. Wiedząc, że $|EF| = 12$ cm oraz pole trapezu $EFCD$ jest o 50 cm^2 mniejsze od pola trapezu $ABFE$, oblicz:
   a) długości podstaw AB i DC trapezu $ABCD$
   b) wysokość trapezu $ABCD$.
5. W równoległoboku $ABCD$ nierównoległe boki mają długość 12 cm i 10 cm. Obrazem równoległoboku $ABCD$ w pewnym podobieństwie jest równoległobok $A_1B_1C_1D_1$. Wiedząc, że pole równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$ jest równe 1200 cm^2, a jego kąt ostry ma miarę 30°, oblicz:
   a) skalę tego podobieństwa
   b) obwód równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$.

Mapa. Skala mapy

Rysunek przedstawia fragment mapy Suwalszczyzny.



Załóżmy, że obszar Suwalszczyzny i mapę tego obszaru potraktujemy jako „figury podobne". Wówczas skalą podobieństwa przekształcającego omawiany obszar na mapę jest – oczywiście – skala mapy.

Wyznaczymy skalę mapy, wiedząc, że odległość Suwałki – Szypliszki w rzeczywistości jest równa 20 km, a na mapie odległość między tymi miejscowościami wynosi 4 cm.

4 cm na mapie $\longrightarrow$ 20 km w rzeczywistości, więc

1 cm na mapie $\longrightarrow$ 5 km w rzeczywistości, 5 km = 5000 m = 500 000 cm, czyli

1 cm na mapie $\longrightarrow$ 500 000 cm w rzeczywistości, zatem skala k mapy jest równa 1 : 500 000

Najdłuższą rzeką na Suwalszczyźnie jest Czarna Hańcza. Na terenie Polski długość tej rzeki wynosi 108 km. Obliczymy, jaka będzie długość tej części Czarnej Hańczy na mapie, jeśli skala mapy jest równa 1 : 500 000.

Ponieważ 1 cm na mapie odpowiada 5 km w rzeczywistości, więc

$108 : 5 = 21{,}6$

Na mapie długość tej części Czarnej Hańczy jest równa 21,6 cm.

Najgłębszym jeziorem w Polsce jest Jezioro Hańcza (maksymalna głębokość 108,5 m) leżące w obszarze Suwalskiego Parku Krajobrazowego. Powierzchnia tego jeziora jest równa 304,4 ha. Jaka jest powierzchnia tego jeziora na mapie powyżej? Wynik podamy w milimetrach kwadratowych.
Powierzchnia jeziora w rzeczywistości i obraz jeziora na mapie są to „figury podobne". Zatem stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.
Przyjmijmy oznaczenia:
P_{rz} – powierzchnia jeziora Hańcza w rzeczywistości, $P_{rz} = 304{,}4$ ha
P_m – powierzchnia jeziora Hańcza na mapie o skali $s = 1 : 500\,000$. Wówczas

$$\frac{P_m}{P_{rz}} = k^2$$

Wyrazimy P_{rz} w milimetrach kwadratowych (wtedy P_m otrzymamy również w milimetrach kwadratowych). Przypomnijmy:

$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2 = 10^8 \text{ cm}^2 = 10^{10} \text{ mm}^2$, więc

$P_{rz} = 304{,}4 \cdot 10^{10} \text{ mm}^2$

Wykorzystujemy własności działań na potęgach i otrzymujemy

$$\frac{P_m}{304{,}4 \cdot 10^{10}} = \left(\frac{1}{5 \cdot 10^5}\right)^2$$

$$P_m = 304{,}4 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{25 \cdot 10^{10}} = 12{,}176 \left(\text{mm}^2\right)$$

Powierzchnia Jeziora Hańcza na mapie jest równa ok. 12,2 mm^2.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Jadąc z Suwałk na zachód w kierunku Bakałarzewa, mijamy Płociczno. Zmierz linijką na mapie odległość między Płocicznem i Suwałkami. Następnie, na podstawie skali mapy, oblicz, jaka jest rzeczywista odległość między tymi miejscowościami.

2. Najdalej położoną na północ miejscowością Suwalszczyzny są Wiżajny. Wiżajny nazywane są polskim biegunem zimna. Wiedząc, że droga z Suwałk do Wiżajn, prowadząca przez Rutkę-Tartak, ma długość około 36 km, oblicz, ile centymetrów droga ta zajmuje na mapie w skali 1 : 500 000. Następnie zmierz tę drogę linijką na mapie i porównaj wyniki.

3. Na wschód od Suwałk znajduje się Wigierski Park Narodowy (WPN). Jego powierzchnia na mapie wykonanej w skali 1 : 500 000 wynosi w przybliżeniu 6 cm^2.
   a) Wyznacz przybliżone pole powierzchni WPN. Wynik podaj w km^2.
   b) Wiedząc, że powierzchnia rzeczywista WPN jest równa 15 087 ha, oblicz względny błąd przybliżenia z punktu a) i wyraź go w procentach. Wynik tego błędu podaj w przybliżeniu dziesiętnym z dokładnością do 0,01%.

5. Wielomiany

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

W klasie pierwszej poznałeś pojęcie jednomianu. Terminem tym określiliśmy wyrażenia, które są liczbami, literami lub iloczynem liczb i liter. W temacie tym zajmiemy się jednomianami jednej zmiennej.

Definicja 1.

Jednomianem stopnia *n* ($n \in N_+$) jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie, które można zapisać w postaci $a \cdot x^n$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od 0. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem jednomianu**.
Jednomianem stopnia zero nazywamy stałą różną od zera.
Jednomianem zerowym nazywamy stałą równą 0. Jednomian zerowy nie ma określonego stopnia.

Jednomian $3x^2$ jest jednomianem stopnia drugiego, jego współczynnik jest równy 3. Aby określić stopień i współczynnik jednomianu $3x \cdot (-2)x^3 \cdot x^4$, wygodnie jest zapisać ten jednomian w prostszej postaci (czyli w tym przypadku – wykonać mnożenie). Otrzymamy wówczas: $-6x^8$. Zatem jednomian jest stopnia ósmego, a jego współczynnik jest równy -6.

Jednomiany różniące się co najwyżej współczynnikami liczbowymi nazywamy **jednomianami podobnymi**, np.: $\sqrt{7}x^{12}$ i $-8x^{12}$. Nie są podobne na przykład jednomiany: $6x^5$ i $6x^7$. Jednomian zerowy uważamy za podobny do każdego jednomianu. Jednomiany podobne nazywa się też **wyrazami podobnymi**. Jednomiany podobne można zredukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich, np.:

$2x^2 + (-5x^2) = -3x^2 \qquad -17x^5 + 17x^5 = 0$

W wyniku dodawania jednomianów otrzymujemy wyrażenie algebraiczne zwane wielomianem.

Definicja 2.

Wielomianem stopnia *n* ($n \in N_+$) jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie, które można zapisać w postaci

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $a_n \neq 0$. Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy **współczynnikami wielomianu**.
Wielomianem stopnia zero nazywamy każdą liczbę rzeczywistą różną od zera.
Wielomianem zerowym nazywamy liczbę równą zeru. Wielomian zerowy nie ma określonego stopnia.

Jednomiany $a_n \cdot x^n, a_{n-1} \cdot x^{n-1}, a_{n-2} \cdot x^{n-2}, \dots, a_2 \cdot x^2, a_1 \cdot x, a_0$ nazywamy **wyrazami wielomianu**, liczbę a_0 nazywamy wyrazem wolnym.
Wielomiany zwyczajowo będziemy oznaczać wielkimi literami. Zapiszemy na przykład:

$$W(x) = -12x^2 - 8 - 5x^6 + 2x^3$$

Wielomian zerowy będziemy też zapisywać tak: $W(x) \equiv 0$.
Wielomian $W(x) = -12x^2 - 8 - 5x^6 + 2x^3$ możemy uporządkować

rosnąco: $W(x) = -8 - 12x^2 + 2x^3 - 5x^6$ (według rosnących wykładników potęg zmiennej) lub

malejąco: $W(x) = -5x^6 + 2x^3 - 12x^2 - 8$ (według malejących wykładników potęg zmiennej).

W dalszej części będziemy porządkować wielomiany malejąco.
Jeśli stopień wielomianu $W(x)$ jest równy n, to zapisujemy st.$W(x) = n$.

Przykład 1.

Dany jest wielomian $W(x) = 5x^8 - 2x^2 + 4x^6 + 2x^3 + 3x^6 - 5x^8 + x^4 - 1$. Podamy stopień wielomianu oraz wypiszemy jego współczynniki.

Najpierw redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy wielomian $W(x)$.

$$W(x) = 7x^6 + x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 1$$

Teraz podajemy stopień wielomianu i jego współczynniki.

st.$W(x) = 6$ oraz $a_6 = 7, a_5 = 0, a_4 = 1, a_3 = 2, a_2 = -2, a_1 = 0, a_0 = -1$.

Wielomian będący sumą dwóch niezerowych jednomianów różnych stopni nazywamy dwumianem, np. wyrażenia $3x^4 - x^2$, $1 - x^6$, $2x^9 + 5x^5$ – to dwumiany. Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy trójmianem; trójmianami są: $7x^5 - 2x^2 + 1, -9x^8 + 5x^3 - x^2$ itd.
W szczególności dwumian stopnia pierwszego (np. $x - 3$, $2x + 7$) będziemy nazywać **dwumianem liniowym**, a trójmian stopnia drugiego (np. $4x^2 - 3x + 5$, $-x^2 + x - 1$) – **trójmianem kwadratowym**. Wielkością charakteryzującą trójmian kwadratowy jest wyróżnik (Δ), określony analogicznie jak w przypadku funkcji kwadratowej.

Wartością wielomianu $W(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ dla liczby c, $c \in \boldsymbol{R}$, nazywamy liczbę $a_n \cdot c^n + \dots + a_1 \cdot c + a_0$ i oznaczamy ją $W(c)$.
Zauważ, że wartość wielomianu $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dla liczby 1 wynosi

$$W(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0,$$

czyli jest równa sumie wszystkich współczynników tego wielomianu.

Przykład 2.

Obliczymy sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (5x^9 + 6x^5 - 13x)^4$.

W tej sytuacji wystarczy obliczyć wartość wielomianu dla liczby 1. Zatem

$$W(1) = (5 \cdot 1^9 + 6 \cdot 1^5 - 13 \cdot 1)^4 = (-2)^4 = 16$$

Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (5x^9 + 6x^5 - 13x)^4$ wynosi 16.

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, dla liczby 3 przyjmuje wartość 43, zaś dla liczby 1 przyjmuje wartość 8, to co najmniej jeden z jego współczynników nie jest liczbą całkowitą.

Założenie: $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$
$W(3) = 43, \quad W(1) = 8$
Teza: co najmniej jedna z liczb a, b, c, d nie jest liczbą całkowitą

Dowód (nie wprost):
Załóżmy, że wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$ są liczbami całkowitymi.
Z założenia wiemy, że $W(3) = 43$ oraz $W(1) = 8$ zatem:

$$\begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = 43 \\ a + b + c + d = 8 \end{cases}$$

Po odjęciu otrzymanych równań stronami mamy:

$26a + 8b + 2c = 35$, skąd

$2 \cdot (13a + 4b + c) = 35$

Lewa strona równania jest liczbą całkowitą, bo z założenia a, b, c są liczbami całkowitymi (suma iloczynów liczb całkowitych jest liczbą całkowitą). Ponadto jest to liczba podzielna przez 2, czyli liczba parzysta. Po prawej stronie występuje liczba 35, czyli liczba nieparzysta. Zatem otrzymana równość jest fałszywa. Założenie, że wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$ są liczbami całkowitymi, doprowadziło nas do sprzeczności. Stąd wnioskujemy, że co najmniej jeden ze współczynników wielomianu $W(x)$ nie jest liczbą całkowitą.

Przykład 4.

Wykażemy, że jeśli $6a$, $2b$ oraz c są liczbami całkowitymi, to wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 - (a + b)x + c$ przyjmuje wartość całkowitą dla dowolnej liczby całkowitej p.

Założenie:

$W(x) = ax^3 + bx^2 - (a + b)x + c$ – wielomian;

$6a$, $2b$, c – liczby całkowite; p – dowolna liczba całkowita

Teza:

$W(p) \in \boldsymbol{C}$

Dowód:
Przekształcimy wielomian $W(x)$ w następujący sposób:

$$W(x) = ax^3 + bx^2 - (a + b)x + c = ax^3 + bx^2 - ax - bx + c = a(x^3 - x) + b(x^2 - x) + c =$$
$$= 6a \cdot \frac{x^3 - x}{6} + 2b \cdot \frac{x^2 - x}{2} + c = 6a \cdot \frac{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)}{6} + 2b \cdot \frac{(x-1) \cdot x}{2} + c$$

Obliczymy wartość wielomianu dla liczby całkowitej p:

$$W(p) = 6a \cdot \frac{(p-1) \cdot p \cdot (p+1)}{6} + 2b \cdot \frac{(p-1) \cdot p}{2} + c$$

Z własności liczb wiemy, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych $p-1$, p oraz $p+1$ jest liczbą podzielną przez 6, więc liczba $\frac{(p-1)\cdot p\cdot(p+1)}{6}$ jest całkowita. Z założenia $6a$ jest liczbą całkowitą, więc $6a\cdot\frac{(p-1)\cdot p\cdot(p+1)}{6}$ też jest liczbą całkowitą. Podobnie iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych $p-1$ oraz p jest liczbą podzielną przez 2, więc liczba $\frac{(p-1)\cdot p}{2}$ jest całkowita. Ale z założenia $2b$ jest liczbą całkowitą, więc iloczyn $2b\cdot\frac{(p-1)\cdot p}{2}$ też jest liczbą całkowitą. Stąd $W(p)$ jest liczbą całkowitą, jako suma trzech liczb całkowitych, co kończy dowód.

Przykład 5.

Dany jest wielomian $W(x)=(m^2-4)x^4+(m^2-m-2)x^3+(m+2)x-3$. Określimy stopień tego wielomianu w zależności od wartości parametru m, gdzie $m\in\boldsymbol{R}$.

Zauważmy, że

$m^2-4=(m-2)(m+2)$ oraz

$m^2-m-2=(m-2)(m+1)$,

zatem wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci:

$$W(x)=(m-2)(m+2)x^4+(m-2)(m+1)x^3+(m+2)x-3$$

Jeśli $m=2$, to wielomian ma postać $W(x)=4x-3$, więc st.$W(x)=1$.
Jeśli $m=-2$, to otrzymujemy $W(x)=4x^3-3$, więc st.$W(x)=3$.
Jeśli $m\in\boldsymbol{R}-\{-2,2\}$, to wielomian jest stopnia czwartego, czyli st.$W(x)=4$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Określ stopień jednomianu:
   a) $(x^4)^3\cdot x^7$ b) $2(x^3)^5\cdot(x^2)^6$
2. Uporządkuj wielomian $W(x)$, następnie podaj jego stopień i wypisz jego współczynniki:
   a) $W(x)=5x^3-2x^6+4x^2-7x^5+x-12$
   b) $W(x)=-4x^7+3x^3-2x^3+5x^7-2x^4-x^7$
3. Oblicz wartości wielomianu $W(x)=-x^3+5x^2+3x-1$ dla podanych liczb: $-2, -1, 0, 1, 5$.
4. Wyznacz sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x)=12x^5-2x^4+6x^3-200$ b) $W(x)=(2x^{10}-3x^{22})^3$
5. Określ stopień wielomianu $W(x)=(m^2-2m-3)x^5+2(m-3)x^3+(m+1)x^2-5$ ze względu na wartość parametru m ($m\in\boldsymbol{R}$).
6. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+bx+4$, jeśli wiadomo, że $W(1)=3$ i $W(-2)=-30$.
7. Dany jest wielomian $W(x)=x^4-x^2$. Wykaż, że $W(1-\sqrt{2})=W(\sqrt{2}-1)$.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować i mnożyć. W wyniku tych działań otrzymujemy wielomian zmiennej rzeczywistej x. Dodawanie i mnożenie wielomianów ma takie same własności jak dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych; działania te są przemienne, łączne oraz zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Sumą wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$, gdzie

$$Q(x) = W(x) + P(x)$$

Aby dodać wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, należy zapisać wszystkie wyrazy pierwszego i drugiego wielomianu w postaci sumy, a następnie przeprowadzić redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 1.

Wyznaczymy wielomian $Q(x)$, który jest sumą wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = -3x^5 + 4x^4 + 2x$ $\quad P(x) = 2x^4 - 2x + 3$

b) $W(x) = -5x^3 + 3x^2 + 2$ $\quad P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7$

c) $W(x) = 2x^6 - 7$ $\quad P(x) = -2x^6 + 7$

W przypadku a) otrzymujemy wielomian $Q(x)$, którego stopień jest taki sam jak stopień wielomianu $W(x)$.

$$Q(x) = W(x) + P(x) = \left(-3x^5 + 4x^4 + 2x\right) + \left(2x^4 - 2x + 3\right) =$$
$$= -3x^5 + 4x^4 + 2x + 2x^4 - 2x + 3 = -3x^5 + 6x^4 + 3$$
$$Q(x) = -3x^5 + 6x^4 + 3$$

W przypadku b) otrzymujemy wielomian $Q(x)$, który jest stopnia drugiego.

$$Q(x) = W(x) + P(x) = \left(-5x^3 + 3x^2 + 2\right) + \left(5x^3 + 2x^2 - 7\right) =$$
$$= -5x^3 + 3x^2 + 2 + 5x^3 + 2x^2 - 7 = 5x^2 - 5$$
$$Q(x) = 5x^2 - 5$$

W przypadku c) wielomian $Q(x)$ jest wielomianem zerowym.

$$Q(x) = W(x) + P(x) = \left(2x^6 - 7\right) + \left(-2x^6 + 7\right) = 2x^6 - 7 - 2x^6 + 7 = 0$$
$$Q(x) \equiv 0$$

Różnicą wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$, gdzie

$$Q(x) = W(x) - P(x)$$

Na przykład jeśli $W(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3$ i $P(x) = -2x^5 + 5x^3 - 2x + 5$, to

$$Q(x) = W(x) - P(x) = \left(-x^3 + 3x^2 - 2x + 3\right) - \left(-2x^5 + 5x^3 - 2x + 5\right) =$$
$$= -x^3 + 3x^2 - 2x + 3 + 2x^5 - 5x^3 + 2x - 5 = 2x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 2$$
$$Q(x) = 2x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 2$$

Różnicę $W(x) - P(x)$ możemy zapisać też w postaci sumy $W(x) + \left[-P(x)\right]$. Odjąć wielomian $P(x)$ od wielomianu $W(x)$ to znaczy dodać do wielomianu $W(x)$ wielomian, którego współczynniki są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu $P(x)$.

Jeśli $W(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3$ i $P(x) = -2x^5 + 5x^3 - 2x + 5$, to

$$Q(x) = W(x) - P(x) = W(x) + \left[-P(x)\right] = \left(-x^3 + 3x^2 - 2x + 3\right) + \left(2x^5 - 5x^3 + 2x - 5\right) =$$
$$= 2x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 2$$
$$Q(x) = 2x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 2$$

Zauważ, że jeśli wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ mają różne stopnie, to suma (różnica) tych wielomianów ma stopień równy większemu ze stopni wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$. Jeśli stopnie wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ są równe, wówczas stopień sumy (różnicy) tych wielomianów jest nie większy niż stopień tych wielomianów lub suma (różnica) jest wielomianem zerowym.

Mnożenie wielomianów

Iloczynem wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ nazywamy wielomian $Q(x)$, gdzie

$$Q(x) = W(x) \cdot P(x)$$

Wykonując mnożenie wielomianów, stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Aby pomnożyć wielomian przez drugi wielomian, należy pomnożyć każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu, a następnie wykonać redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 2.

Wyznaczymy wielomian $Q(x)$, który jest iloczynem wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 + x + 1$ $\quad P(x) = -2x^2 + 3$

b) $W(x) = 4x^5 - 3x^2 + 5$ $\quad P(x) \equiv 0$

W przypadku a) mamy:

$$Q(x) = W(x) \cdot P(x) = \left(x^3 + x + 1\right) \cdot \left(-2x^2 + 3\right) =$$
$$= x^3 \cdot \left(-2x^2\right) + x^3 \cdot 3 + x \cdot \left(-2x^2\right) + x \cdot 3 + 1 \cdot \left(-2x^2\right) + 1 \cdot 3 =$$
$$= -2x^5 + 3x^3 - 2x^3 + 3x - 2x^2 + 3 = -2x^5 + x^3 - 2x^2 + 3x + 3$$
$$Q(x) = -2x^5 + x^3 - 2x^2 + 3x + 3$$

Zauważ, że st.$Q(x)$ = st.$W(x)$ + st.$P(x) = 5$.

W przypadku b) otrzymujemy wielomian zerowy.

$$Q(x) = W(x) \cdot P(x) = \left(4x^5 - 3x^2 + 5\right) \cdot 0 = 4x^5 \cdot 0 - 3x^2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

$$Q(x) \equiv 0$$

Wielomian $Q(x)$ nie ma określonego stopnia.

Zauważ, że stopień iloczynu dwóch wielomianów różnych od wielomianu zerowego jest równy sumie stopni tych wielomianów. W przypadku, gdy przynajmniej jeden z wielomianów jest wielomianem zerowym, iloczyn tych wielomianów jest także wielomianem zerowym.

Przykład 3.

Dany jest wielomian $W(x) = 7 - 3(x+1)^2 \cdot (5x - 4)$. Uporządkujemy wielomian $W(x)$ malejąco, podamy jego stopień i wypiszemy współczynniki tego wielomianu.

Wielomian można uporządkować w różny sposób. Pamiętać jednak należy o kolejności działań. Warto też korzystać z praw dotyczących działań oraz ze wzorów skróconego mnożenia. Oznaczmy

$$Q(x) = (x+1)^2 \text{ i } P(x) = 5x - 4$$

Wówczas

$$W(x) = 7 - 3 \cdot P(x) \cdot Q(x)$$

Mnożenie jest przemienne, więc możemy najpierw pomnożyć wielomian $Q(x)$ przez $P(x)$. W tym celu porządkujemy wielomian $Q(x)$; korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$$Q(x) = x^2 + 2x + 1$$

Wykonujemy mnożenie $Q(x) \cdot P(x)$ i przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

$$Q(x) \cdot P(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right) \cdot (5x - 4) = 5x^3 - 4x^2 + 10x^2 - 8x + 5x - 4 =$$
$$= 5x^3 + 6x^2 - 3x - 4$$

Stąd

$$W(x) = 7 - 3 \cdot \left(5x^3 + 6x^2 - 3x - 4\right)$$

Teraz wielomian w nawiasie mnożymy przez 3, a następnie wykonujemy odejmowanie.

$$W(x) = 7 - \left(15x^3 + 18x^2 - 9x - 12\right) = 7 - 15x^3 - 18x^2 + 9x + 12 =$$
$$= -15x^3 - 18x^2 + 9x + 19$$

Można też wielomian w nawiasie pomnożyć przez (-3) i przeprowadzić redukcję wyrazów podobnych.

$$W(x) = 7 - 15x^3 - 18x^2 + 9x + 12 = -15x^3 - 18x^2 + 9x + 19$$

Otrzymaliśmy, że $W(x) = -15x^3 - 18x^2 + 9x + 19$, zatem

$$\text{st.}W(x) = 3, \quad a_3 = -15,\ a_2 = -18,\ a_1 = 9,\ a_0 = 19.$$

Na koniec pokażemy inny sposób mnożenia wielomianu przez wielomian.

Wielocyfrowe liczby całkowite zwykle mnożymy sposobem pisemnym. Okazuje się, że w podobny sposób możemy pomnożyć wielomiany.
Poniżej ilustrujemy mnożenie pisemne liczb $273 \cdot 15$ oraz mnożenie wielomianów $(x^3 - 7x^2 + x + 1) \cdot (-2x^2 + 3)$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & x^3 - & 7x^2 + & x & + 1 \\
\times & & & & -2x^2 + & 0x & + 3 \\
\hline
 & & & 3x^3 - & 21x^2 & 3x & 3 \\
 & & 0x^4 & 0x^3 & 0x^2 & 0x & \\
+ & -2x^5 + & 14x^4 - & 2x^3 - & 2x^2 & & \\
\hline
 & -2x^5 + & 14x^4 + & x^3 - & 23x^2 + & 3x & + 3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
273 \\
\times \quad 15 \\
\hline
1365 \\
+\ 273 \\
\hline
4095
\end{array}
$$

Zauważ, że w mnożeniu wielomianów sposobem pisemnym występują znaki „–" i nie ma „przenoszenia" do jednostek wyższych rzędów.
Ten sposób pisemnego mnożenia wielomianów możemy sobie ułatwić, mnożąc odpowiednie współczynniki wielomianów. Metoda ta nosi nazwę „metody kolejnych współczynników" i jest wykorzystywana w programach komputerowych.
Pomnóżmy jeszcze raz wielomian $W(x) = x^3 - 7x^2 + x + 1$ przez wielomian $P(x) = -2x^2 + 3$. Wiemy, że stopień iloczynu $W(x) \cdot P(x)$ wynosi 5. Mamy

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & 1 & \\
\times & & & 1 & -7 & 1 & 1 & \longleftarrow \text{współczynniki wielomianu } W(x) \\
 & & & & -2 & 0 & 3 & \longleftarrow \text{współczynniki wielomianu } P(x) \\
\hline
 & & & 3 & -21 & 3 & 3 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
+ & -2 & 14 & -2 & -2 & & & \\
\hline
 & -2 & 14 & 1 & -23 & 3 & 3 & \longleftarrow \text{współczynniki powstałego wielomianu}
\end{array}
$$

Zatem

$$W(x) \cdot P(x) = -2x^5 + 14x^4 + x^3 - 23x^2 + 3x + 3.$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz $W(x) + P(x)$, $W(x) - P(x)$ oraz $W(x) \cdot P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 3x^5 - 4x^3 + 5$, $P(x) = -7$
   b) $W(x) = -x^4 - 2x^3$, $P(x) = x^3 - 4x$
   c) $W(x) = 2x^2 - 3x$, $P(x) = x^3 - 2x^2$
   d) $W(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{1}{4}$, $P(x) = 8x^2 - 6$
2. Dane są wielomiany: $W(x) = -x^4 - x^3 + 1$ i $P(x) = -2x^3 \quad 4$. Wyznacz wielomian $Q(x)$, jeśli:
   a) $Q(x) = W(x) \cdot P(x) - 2P(x)$
   b) $Q(x) = [P(x) - W(x)] \cdot (2x^2 - 3)$
   c) $Q(x) = [P(x)]^2 + x^2 \cdot W(x)$
   d) $Q(x) = x \cdot P(x) - 2W(x)$
3. Wykonaj sposobem pisemnym mnożenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 5x^6 - 2x^4 + 3x + 6$ i $P(x) = x^3 - 6x^2 + x + 2$
   b) $W(x) = -3x^5 + 4x^4 + 3x - 4$ i $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

Równość wielomianów

Wiesz, że w wyniku dodawania, odejmowania oraz mnożenia wielomianów jednej zmiennej otrzymujemy nowy wielomian, który przedstawiamy w najprostszej postaci, uporządkowany rosnąco lub malejąco.

Przykład 1.

Dane wielomiany $W(x)=(2x^2+3x-1)(2x^2+3x+1)$ oraz $F(x)=x^2(2x+3)^2-1$ przedstawimy w najprostszej postaci i uporządkujemy malejąco, a następnie porównamy stopnie oraz współczynniki tych wielomianów.

Otrzymujemy:

$W(x)=(2x^2+3x-1)(2x^2+3x+1)$	$F(x)=x^2(2x+3)^2-1$
$W(x)=4x^4+6x^3+2x^2+6x^3+9x^2+3x-2x^2-3x-1$	$F(x)=x^2(4x^2+12x+9)-1$
$W(x)=4x^4+12x^3+9x^2-1$	$F(x)=4x^4+12x^3+9x^2-1$
$a_4=4,\ a_3=12,\ a_2=9,\ a_1=0,\ a_0=-1$	$b_4=4,\ b_3=12,\ b_2=9,\ b_1=0,\ b_0=-1$

Otrzymaliśmy wielomiany tego samego stopnia, bo st.$W(x)$ = st.$F(x)$ = 4. Wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ mają także jednakowe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x:

$$a_4=b_4,\quad a_3=b_3,\quad a_2=b_2,\quad a_1=b_1,\quad a_0=b_0$$

Przyjmujemy następującą definicję.

> **Definicja 1.**
> **Dwa wielomiany** tej samej zmiennej x **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są to wielomiany tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x lub są to wielomiany zerowe.

Zatem nie są równe wielomiany

$$W(x)=x^2-3x+1 \text{ i } P(x)=x^3-3x+1,$$

bo mają różny stopień (st.$W(x)=2$, st.$P(x)=3$); nie są równe wielomiany

$$S(x)=x^3+5x^2+2 \text{ i } T(x)=x^3-5x^2+2,$$

bo nie mają identycznych współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej ($a_2=5$, $b_2=-5$).

Przykład 2.

Sprawdzimy, czy istnieje taka liczba a, dla której wielomiany $F(x)=(x-a)(x+3)^2$ oraz $W(x)=x^3+5x^2+3x-8$ są równe.

Wykonamy najpierw działania zapisane we wzorze wielomianu $F(x)$, a następnie uporządkujemy ten wielomian malejąco:

$$F(x)=(x-a)(x+3)^2=(x-a)(x^2+6x+9)=x^3+6x^2+9x-ax^2-6ax-9a$$
$$F(x)=x^3+(6-a)x^2+(9-6a)x-9a$$

Rozważane wielomiany $F(x)$ oraz $W(x)$ są tego samego stopnia, bowiem $\text{st.}F(x) = \text{st.}W(x) = 3$.
Wielomiany te będą równe tylko wtedy, gdy ich współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x będą równe. Współczynnik przy x^3 w obu wielomianach jest taki sam (równy 1), więc porównujemy pozostałe współczynniki:

$$6 - a = 5 \quad \text{i} \quad 9 - 6a = 3 \quad \text{i} \quad -9a = -8$$

$$a = 1 \quad \text{i} \quad a = 1 \quad \text{i} \quad a = \frac{8}{9}.$$

Liczba a nie może być jednocześnie równa 1 oraz $\frac{8}{9}$.

Nie istnieje taka liczba a, dla której wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ byłyby równe.

Przykład 3.

Wyznaczymy liczbę m, dla której wielomiany $W(x) = 9x^3 - (m - 6)x^2 + 2$ oraz $F(x) = 9x^3 + 7x^2 + 3(m + 1)x + 2$ są równe.

Wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ są uporządkowane malejąco, $\text{st.}W(x) = \text{st.}F(x) = 3$. Współczynniki przy x^3 w obu wielomianach są równe 9, a wyrazy wolne są takie same i wynoszą 2. Należy wyznaczyć liczbę m w taki sposób, aby pozostałe współczynniki tych wielomianów przy odpowiednich potęgach zmiennej x też były równe.

$$W(x) = 9x^3 - (m - 6)x^2 + 0x + 2 \qquad F(x) = 9x^3 + 7x^2 + 3(m + 1)x + 2$$

Otrzymujemy układ dwóch równań z niewiadomą m.

$$\begin{cases} -(m-6) = 7 \\ 0 = 3(m+1) \end{cases}$$

Rozwiązaniem pierwszego równania jest liczba -1, drugiego – również -1.
Wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ są równe wtedy, gdy $m = -1$.
Wówczas $W(x) = F(x) = 9x^3 + 7x^2 + 2$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Sprawdź, czy wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ są równe, jeśli:
   a) $W(x) = (2x - 1)^2(x + 3)$ $\qquad F(x) = 4x^3 + 12x^2 + x + 3$
   b) $W(x) = (4x - 3)(x^2 + 1)(4x + 3)$ $\qquad F(x) = 16x^4 + 7x^2 - 9$
2. Sprawdź, czy istnieje liczba a, dla której wielomiany $W(x)$ oraz $F(x)$ są równe, jeśli:
   a) $W(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ $\qquad F(x) = x^4 + ax^2 + a + 1$
   b) $W(x) = (x + a)(x + 1)^2$ $\qquad F(x) = x^3 - 3x - 2$
3. Sprawdź, czy istnieją liczby a i b, dla których wielomiany $F(x)$ oraz $W(x)$ są równe, jeśli:
   a) $F(x) = x^4 - (a - 5b)x^2 + 8a$ $\qquad W(x) = x^4 + (2a - b)x^3 + 18x^2 + 16$
   b) $F(x) = -5x^3 + (2a - 9b)x^2 + 9x$ $\qquad W(x) = -5x^3 + (a + b)x^2 + (a - 3b)x - a$

Podzielność wielomianów

Definicja 1.
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$ różny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, dla którego $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wówczas wielomian $Q(x)$ nazywamy **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Wielomian $P(x)$ jest **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$.

Jeśli wielomian $W(x) \equiv 0$, to każdy niezerowy wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$, przy czym iloraz $Q(x)$ jest wielomianem zerowym ($Q(x) \equiv 0$).

Podzielność wielomianów jest bardzo podobna do podzielności liczb całkowitych. Porównajmy:

- Liczba 36 jest podzielna przez 9, bowiem
  $$36 = 4 \cdot 9$$
  W dzieleniu 36 : 9 liczba 9 jest dzielnikiem, a liczba 4 ilorazem liczby 36 przez 9.
- Wielomian
  $$W(x) = x^2 - 9$$
  jest podzielny przez wielomian
  $$P(x) = x + 3,$$
  bowiem
  $$W(x) = (x-3) \cdot (x+3)$$
  W dzieleniu $W(x) : P(x)$ wielomian
  $$P(x) = x + 3$$
  jest dzielnikiem, a wielomian
  $$Q(x) = x - 3$$
  jest ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.

UWAGA: Jeśli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, to jest również podzielny przez wielomian $c \cdot P(x)$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą różną od zera.

Zobaczmy to na przykładzie wielomianu $W(x) = x^2 - 1$. Wielomian możemy zapisać w postaci:

$W(x) = (x+1)(x-1)$, więc jest on podzielny przez $P_1(x) = x + 1$

$W(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x - 2)$, więc jest podzielny przez $P_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$W(x) = (3x+3) \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)$, więc jest podzielny przez $P_3(x) = 3x + 3$ itd.

Zdefiniowanie podzielności wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ za pomocą iloczynu wielomianu $P(x)$ i pewnego wielomianu $Q(x)$ jest bardzo pomocne w rozwiązywaniu różnych zadań.

Przykład 1.

Wielomian $W(x) = 8x^3 + ax^2 - bx - 3$ podzielono przez wielomian $P(x) = 4x^2 - 1$. W wyniku tego dzielenia otrzymano iloraz $Q(x) = 2x + 3$. Wyznaczymy wartości współczynników a i b.

Wielomian $W(x)$ podzielono przez wielomian $P(x)$, a iloraz tego dzielenia wynosi $Q(x)$, więc

$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, stąd

$W(x) = (4x^2 - 1)(2x + 3)$,

a po uporządkowaniu

$W(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$

Wiemy, że

$W(x) = 8x^3 + ax^2 - bx - 3$ oraz

$W(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$

Na podstawie definicji równości wielomianów otrzymujemy: $a = 12$ i $b = 2$.
Wartości współczynników wielomianu $W(x)$ wynoszą: $a = 12$ i $b = 2$.

Zauważ, że jeśli wielomian niezerowy $W(x)$ zmiennej rzeczywistej x możemy przedstawić w postaci iloczynu $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami, to wielomian $W(x)$ jest podzielny zarówno przez wielomian $P(x)$ $\big($i wówczas ilorazem jest wielomian $Q(x)\big)$, jak i przez wielomian $Q(x)$ $\big($i wówczas ilorazem jest wielomian $P(x)\big)$.

Ponadto z własności mnożenia wielomianów wiemy, że $\text{st.}W(x) = \text{st.}P(x) + \text{st.}Q(x)$.

Ogólnie, jeśli wielomian niezerowy możemy przedstawić w postaci iloczynu kilku wielomianów, to stopień tego wielomianu jest sumą stopni wszystkich czynników tego mnożenia, a wielomian jest podzielny przez każdy z tych czynników.

Przykład 2.

Dany jest wielomian $W(x) = x(x - 1)(x + 2)(x \quad 3)$. Określimy stopień wielomianu $W(x)$. Następnie podamy przykład wielomianu stopnia drugiego i wielomianu stopnia trzeciego, który jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

- Wielomian $W(x)$ jest iloczynem czterech czynników

  $W(x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

  każdy czynnik jest wielomianem stopnia pierwszego, zatem

  $\text{st.}W(x) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
- Rozpatrzmy wielomian

  $P(x) = x(x - 1)$, $\text{st.}P(x) = 2$

  Dla wielomianu $P(x)$ istnieje wielomian

  $Q(x) = (x + 2)(x - 3)$,

  dla którego

  $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$,

  stąd dzielnikiem wielomianu $W(x)$ jest wielomian

  $P(x) = x^2 - x$

- Niech wielomian $K(x)$ będzie iloczynem trzech czynników:
  $K(x) = x(x-1)(x+2)$, st.$K(x) = 3$
  Wielomian $W(x)$ można przedstawić jako
  $W(x) = K(x) \cdot (x-3)$,
  zatem dzielnikiem wielomianu $W(x)$ jest wielomian
  $K(x) = x^3 + x^2 - 2x$

Wskaż inne wielomiany stopnia drugiego i stopnia trzeciego, które są dzielnikami wielomianu $W(x)$.

Powyższe rozważania pokazują, że łatwo znaleźć wielomiany, przez które jest podzielny dany wielomian $W(x)$ wtedy, gdy jest on zapisany w postaci iloczynu innych wielomianów.

Wyznaczymy teraz wynik dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, kiedy wielomian $W(x)$ jest zapisany w postaci sumy jednomianów.

Przykład 3.

Wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 15$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Znajdziemy iloraz z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$.

Wielomian $W(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 15$ możemy również zapisać jako

$$W(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot Q(x)$$

Wielomian $W(x)$ jest trzeciego stopnia, więc st.$Q(x) = 1$. Zatem iloraz jest dwumianem liniowym

$$Q(x) = mx + n, \text{ gdzie } m \neq 0.$$

Otrzymujemy:

$$W(x) = (x^2 + 2x - 3)(mx + n) =$$
$$= mx^3 + (n + 2m)x^2 + (2n - 3m)x - 3n$$

Porównujemy współczynniki przy x^3 i wyrazy wolne:

$$m = 2$$
$$-3n = 15,$$

stąd

$$n = -5$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić równość współczynników przy x^2 i przy x.

$$n + 2m = -5 + 2 \cdot 2 = -1$$
$$2n - 3m = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 = -16$$

Szukanym ilorazem jest wielomian $W(x) = 2x - 5$.

Przykład 4.

Wykażemy, że jeśli $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i $a \neq 0$, natomiast p – dowolną liczbą rzeczywistą, to wielomian $P(x) = W(x) - W(p)$ jest podzielny przez $(x - p)$.

Założenie: $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0, p \in \mathbf{R}$
Teza: $P(x) = W(x) - W(p)$ jest podzielny przez $(x - p)$

Dowód:
Wystarczy pokazać, że istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $P(x) = (x - p) \cdot Q(x)$.
Mamy:

$$\begin{aligned}P(x) &= W(x) - W(p) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) - \left(ap^3 + bp^2 + cp + d\right) = \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d - ap^3 - bp^2 - cp - d = \\ &= \left(ax^3 - ap^3\right) + \left(bx^2 - bp^2\right) + (cx - cp) = \\ &= a \cdot \left(x^3 - p^3\right) + b \cdot \left(x^2 - p^2\right) + c \cdot (x - p) = \\ &= a \cdot (x - p)(x^2 + px + p^2) + b \cdot (x - p)(x + p) + c \cdot (x - p)\end{aligned}$$

Teraz korzystamy z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - p) \cdot \left[a\left(x^2 + px + p^2\right) + b(x + p) + c\right] = \\ &= (x - p) \cdot \left(ax^2 + apx + ap^2 + bx + bp + c\right) = \\ &= (x - p) \cdot \left[ax^2 + (ap + b)x + ap^2 + bp + c\right] = \\ &= (x - p) \cdot Q(x),\end{aligned}$$

gdzie

$Q(x) = ax^2 + (ap + b)x + ap^2 + bp + c,$ co kończy dowód.

Wykaż prawdziwość powyższego twierdzenia dla wielomianu stopnia czwartego. Jak sądzisz, czy twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnego wielomianu stopnia n, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$?

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dany jest wielomian $W(x) = (x^2 - 4) \cdot (2x^2 + 5x - 3)$. Podaj cztery różne wielomiany stopnia pierwszego, które są dzielnikami wielomianu $W(x)$.
2. Podaj przykład wielomianu $W(x)$ stopnia czwartego, który jest podzielny przez wielomian:
   a) $P(x) = 3x + 1$ b) $P(x) = x^2 + 2x + 5$ c) $P(x) = x^3 - 2$
3. Dany jest wielomian $W(x) = (x^3 - 8)(x^4 - 1)(2x^2 + 1)$. Podaj przykład wielomianu, który jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$ i którego stopień jest równy:
   a) jeden b) dwa c) trzy
   d) cztery e) pięć f) sześć
   g) siedem h) osiem i) dziewięć.
4. Wielomian $W(x) = -8x^6 + 8x^4 - 14x^2 + 6$ podzielono przez wielomian $Q(x) = 4x^4 - 2x^2 + 6$. Wielomian $P(x)$ jest wynikiem tego dzielenia. Wyznacz wielomian $P(x)$.
5. Wyznacz liczby a i b, dla których wielomian $W(x) = x^4 - (b - a)x^3 - (a + b)x^2 + 2x$ można zapisać w postaci $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, gdzie $P(x) = x^2 - 3x + 1$ i $Q(x) = x^2 + 2x$.

Dzielenie wielomianów. Dzielenie wielomianów z resztą

W poprzednim temacie, w przykładzie 3. poznałeś metodę znajdowania wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ bez wykonywania dzielenia, jeśli wiadomo było, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$. W ramach tego tematu nauczymy się dzielić wielomiany; czasem będzie to dzielenie z resztą.
Sposób, w jaki dzielimy wielomiany, jest podobny do dzielenia liczb całkowitych, wykonywanego pisemnie. Dlatego przypomnij sobie dzielenie pisemne, dzieląc 4352 przez 17.

Przykład 1.

Podzielimy wielomian $W(x) = -x + 2x^3 - 51$ przez wielomian $P(x) = -3 + x$.

Przed wykonaniem dzielenia wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ należy (koniecznie!) uporządkować malejąco: $W(x) = 2x^3 - x - 51$, $P(x) = x - 3$.

<table>
<tr><th>przebieg dzielenia wielomianów</th><th>opis czynności</th></tr>
<tr><td>Zapisujemy dzielenie $W(x) : P(x)$ tak, jakbyśmy wykonywali dzielenie pisemne na sumach jednomianów; stawiamy kreskę, nad którą napiszemy wynik dzielenia.

$$\begin{array}{l} \underline{2x^2 \qquad + 6x + 17} \\ (2x^3 \qquad - x - 51) : (x - 3) \\ \underline{-2x^3 + 6x^2} \\ \quad = 6x^2 \quad - x - 51 \\ \quad \underline{-6x^2 + 18x} \\ \qquad = 17x - 51 \\ \qquad \underline{-17x + 51} \\ \qquad\quad = 0 \end{array}$$</td><td>

- Pierwszy (od lewej) wyraz dzielnej (wielomianu $W(x)$) dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika $2x^3 : x = 2x^2$; otrzymany jednomian $2x^2$ zapisujemy nad kreską; następnie mnożymy go przez dzielnik $(x - 3)$ i mamy $2x^2 \cdot (x - 3) = 2x^3 - 6x^2$; otrzymany wielomian podpisujemy pod dzielną i odejmujemy go od niej, np. poprzez dodanie wielomianu $-2x^3 + 6x^2$; otrzymujemy pierwszą resztę z dzielenia: $F(x) = 6x^2 - x - 51$.
- Powtarzamy procedurę z poprzedniego punktu, ale teraz dzielną staje się wielomian $F(x)$. Zatem pierwszy wyraz $6x^2$ dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika x i otrzymujemy $6x^2 : x = 6x$, jednomian $6x$ zapisujemy nad kreską; potem mnożymy go przez dzielnik $6x \cdot (x - 3) = 6x^2 - 18x$; otrzymany wielomian podpisujemy pod dzielną $F(x)$ z przeciwnymi znakami i dodajemy; otrzymujemy drugą resztę z dzielenia: $G(x) = 17x - 51$.
- Teraz dzielną staje się wielomian $G(x)$. Pierwszy wyraz $17x$ dzielimy przez x i otrzymujemy liczbę 17, którą zapisujemy nad kreską; potem mnożymy ją przez

</td></tr>
</table>

	dzielnik. Otrzymany wielomian $17x - 51$ podpisujemy pod dzielną $G(x)$ z przeciwnymi znakami i dodajemy. Otrzymujemy trzecią resztę równą 0. Dzielenie zostało zakończone.

W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - x - 51$ przez wielomian $P(x) = x - 3$ otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = 2x^2 + 6x + 17$ oraz resztę $R(x) \equiv 0$. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, czyli $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.
Możemy zapisać:

$(2x^3 - x - 51) : (x - 3) = 2x^2 + 6x + 17$ albo

$2x^3 - x - 51 = (2x^2 + 6x + 17) \cdot (x - 3)$

Sprawdźmy poprawność dzielenia:

$$P(x) \cdot Q(x) = (x-3)(2x^2+6x+17) = 2x^3+6x^2+17x-6x^2-18x-51 = 2x^3-x-51 = W(x)$$

Nie zawsze dzielenie wielomianu przez inny wielomian jest wykonalne w zbiorze wielomianów. To znaczy nie każdy wielomian niższego stopnia jest dzielnikiem wielomianu wyższego stopnia.

Podobnie nie zawsze wynik dzielenia liczb całkowitych jest liczbą całkowitą. Natomiast w zbiorze liczb całkowitych można wykonać zawsze dzielenie z resztą, np.:

$46 : 14 = 3$ r. 4, co znaczy, że $46 = 3 \cdot 14 + 4$

$2 : 6 = 0$ r. 2, co znaczy, że $2 = 0 \cdot 6 + 2$

Poszukajmy analogii do tej sytuacji, wykonując dzielenia wielomianów z resztą.

Przykład 2.

Podzielimy:

a) wielomian $W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 7$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 4$

b) wielomian $W(x) = -4x^3 + 5x + 2$ przez wielomian $P(x) = 2x^3 - 3x$.

Ad a) Stopień wielomianu $W(x)$ jest większy niż stopień wielomianu $P(x)$.

$$\begin{array}{llll}
 & \underline{5x + 2} & & \\
 & (5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) : (x^2 - 4) & & \\
 & \underline{-5x^3 \qquad\quad + 20x} & & \\
= & \quad 2x^2 + 17x + 7 & & \\
 & \quad \underline{-2x^2 \qquad\quad + 8} & & \\
= & \qquad\quad 17x + 15 & \leftarrow \text{reszta} &
\end{array}$$

Stosując odpowiedni algorytm dzielenia, dochodzimy do sytuacji, w której stopień kolejnej dzielnej $(17x + 15)$ jest mniejszy niż stopień dzielnika $(x^2 - 4)$. Dalsze dzielenie jest niemożliwe w zbiorze wielomianów.
Wielomian $R(x) = 17x + 15$ jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 7$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 4$ otrzymaliśmy iloraz $Q(x) = 5x + 2$ oraz resztę $R(x) = 17x + 15$.
Wykonajmy sprawdzenie poprawności dzielenia:

$$P(x) \cdot Q(x) + R(x) = (x^2 - 4) \cdot (5x + 2) + (17x + 15) = 5x^3 + 2x^2 - 20x - 8 + 17x + 15$$

$$P(x) \cdot Q(x) + R(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 7 = W(x)$$

Ad b) Stopnie wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ są takie same.

$$\begin{array}{l} \quad -2 \\ \hline (-4x^3+5x+2):(2x^3-3x) \\ \underline{\;4x^3-6x\;} \\ = \qquad -x+2 \leftarrow \text{reszta} \end{array}$$

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = -4x^3 + 5x + 2$ przez wielomian $P(x) = 2x^3 - 3x$ otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = -2$ oraz resztę $R(x) = -x + 2$. Możemy zapisać:

$$W(x) = (2x^3 - 3x) \cdot (-2) + (-x + 2)$$

Sprawdź poprawność dzielenia, wykonując odpowiednie działania.

Dzielenie z resztą wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ możemy również wykonać, jeśli st.$W(x) <$ st.$P(x)$.

Przykład 3.

Podzielimy wielomian $W(x) = x^2 + x$ przez wielomian $P(x) = x^3 + 2x - 7$.

Dzieląc wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, otrzymamy wielomian $Q(x) \equiv 0$ i resztę $R(x) = x^2 + x$, bowiem:

$$Q(x) \cdot P(x) + R(x) = 0 \cdot (x^3 + 2x - 7) + x^2 + x = x^2 + x = W(x)$$

W tym przypadku reszta z dzielenia jest równa dzielnej.

Podsumujmy nasze spostrzeżenia.

Na wielomianach możemy wykonywać dzielenie z resztą. Wówczas:

- Jeśli podzielimy niezerowy wielomian $W(x)$ przez niezerowy wielomian $P(x)$, dla którego st.$W(x) \geqslant$ st.$P(x)$, to otrzymamy iloraz $Q(x)$ różny od wielomianu zerowego i resztę $R(x)$, przy czym st.$R(x) <$ st.$P(x)$ lub $R(x) \equiv 0$.
- Jeśli podzielimy niezerowy wielomian $W(x)$ przez niezerowy wielomian $P(x)$, dla którego st.$W(x) <$ st.$P(x)$, to otrzymamy iloraz $Q(x)$ będący wielomianem zerowym oraz resztę $R(x)$, równą wielomianowi $W(x)$.

Można udowodnić twierdzenie 1.

Twierdzenie 1. (o rozkładzie wielomianu)
Jeśli $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to istnieją dwa wielomiany $Q(x)$ oraz $R(x)$, dla których $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie $R(x) \equiv 0$ lub st.$R(x) <$ st.$P(x)$.

Zauważ, że twierdzenie to jest analogiczne do twierdzenia o dzieleniu z resztą liczb całkowitych.
Z ostatniego twierdzenia wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. (o reszcie)
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - a)$ jest równa $W(a)$.

Dowód:
Na podstawie twierdzenia o rozkładzie wielomianów wiemy, że wielomian $W(x)$ można przedstawić w postaci

$$W(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{gdzie}$$

$$R(x) \equiv 0 \text{ lub } \text{st.}R(x) < \text{st.}(x-a)$$

Ponieważ stopień wielomianu $(x-a)$ jest równy 1, więc stopień reszty jest mniejszy od 1, zatem reszta jest stałą. Oznaczamy $R(x) = r$, gdzie r – stała.
Mamy:

$$W(x) = (x-a) \cdot Q(x) + r$$

Obliczamy wartość wielomianu $W(x)$ dla liczby a:

$$W(a) = (a-a) \cdot Q(a) + r = 0 \cdot Q(a) + r = r,$$

czyli

$$W(a) = r$$

Udowodniliśmy, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-a)$ wynosi $W(a)$.

Twierdzenie o reszcie upraszcza nam w niektórych sytuacjach obliczenia.

Przykład 4.

Obliczymy resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 6$ przez dwumian $(x-2)$.

I sposób	II sposób
Wykonujemy dzielenie wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-2$, żeby otrzymać iloraz i resztę. $\begin{array}{l} x^2 - x + 3 \\ \hline (x^3 - 3x^2 + 5x + 6) : (x-2) \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ = \quad -x^2 + 5x + 6 \\ \quad\quad \underline{x^2 - 2x} \\ \quad\quad = \quad 3x + 6 \\ \quad\quad\quad \underline{-3x + 6} \\ \quad\quad\quad = \quad 12 \end{array}$ Reszta z dzielenia jest równa 12.	Korzystamy z twierdzenia o reszcie. $W(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 6 =$ $= 8 - 12 + 10 + 6 = 12$ Reszta z dzielenia jest równa 12.

Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie rzeczywiste wartości parametru k, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = k^2x^{40} + 6x^{20} + 3k$ przez dwumian $x+1$ jest większa od 4.

Korzystając z twierdzenia o reszcie, obliczamy resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+1$:

$$W(-1) = k^2 \cdot (-1)^{40} + 6 \cdot (-1)^{20} + 3k = k^2 + 3k + 6$$

Teraz należy wyznaczyć te wartości parametru k, dla których reszta $k^2 + 3k + 6$ jest większa od 4. Stąd

$$k^2 + 3k + 6 > 4 \Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 > 0 \Leftrightarrow (k+1)(k+2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$$

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 1$ jest większa od 4 wtedy, gdy $k \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

Przykład 6.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 3)$ jest równa 8, zaś reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $(x + 1)$ wynosi 4. Obliczymy resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x + 1)(x - 3)$.

W tej sytuacji nie znamy wzoru wielomianu $W(x)$, więc nie możemy wykonać dzielenia $W(x)$ przez $(x + 1)(x - 3)$. Pozostaje sposób wykorzystujący twierdzenie o rozkładzie wielomianu i twierdzenie o reszcie.
Na podstawie pierwszego twierdzenia wiemy, że istnieją wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, dla których

$$W(x) = Q(x) \cdot (x+1)(x-3) + R(x), \quad \text{gdzie}$$
$$\text{st.}R(x) < 2 \text{ lub } R(x) \equiv 0.$$

Reszta jest wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego lub jest wielomianem zerowym, więc ma postać

$$R(x) = ax + b, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbf{R}.$$

Mamy więc:

$$W(x) = Q(x) \cdot (x+1)(x-3) + ax + b, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbf{R}.$$

Ponadto, reszty z dzielenia $W(x)$ przez dwumiany $(x + 1)$ oraz $(x - 3)$ są odpowiednio równe 4 oraz 8, więc na podstawie twierdzenia o reszcie otrzymujemy:

$$\begin{cases} W(-1) = 4 \\ W(3) = 8, \end{cases}$$

gdzie

$$W(x) = Q(x) \cdot (x+1)(x-3) + ax + b$$

Obliczamy wartości wielomianu $W(x)$ dla argumentów (-1) oraz 3 i otrzymujemy następujący układ:

$$\begin{cases} W(-1) = \overbrace{Q(-1) \cdot (-1+1) \cdot (-1-3)}^{0} - a + b = 4 \\ W(3) = \underbrace{Q(3) \cdot (3+1) \cdot (3-3)}_{0} + 3a + b = 8, \end{cases}$$

zatem

$$\begin{cases} -a + b = 4 \\ 3a + b = 8, \end{cases} \quad \text{stąd}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x+1)(x-3)$ jest wielomianem $R(x) = x + 5$.

Czasami, aby rozwiązać zadanie, możemy wykonać dzielenie wielomianów z parametrem.

Przykład 7.

Wyznaczymy wartości współczynników a i b tak, aby wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 8x^2 + ax + b$ był podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - x + 5$.

Wykonamy dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

$$
\begin{array}{rlllll}
 & x^2 - 2x + 1 & & & & \\
\hline
 & (x^4 - 3x^3 + 8x^2 + & & ax + b) & : (x^2 - x + 5) \\
 & -x^4 + x^3 - 5x^2 & & & & \\
\hline
= & -2x^3 + 3x^2 + & & ax & & \\
 & \;\; 2x^3 - 2x^2 + & & 10x & & \\
\hline
 & = \quad x^2 + (a+10)x + b & & & & \\
 & \quad\;\;\; -x^2 + & & x - 5 & & \\
\hline
 & \quad = \quad (a+11)x + b - 5 & & & &
\end{array}
$$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, to znaczy, że $R(x) = (a+11) \cdot x + b - 5$ jest wielomianem zerowym. Zatem

$$\begin{cases} a + 11 = 0 \\ b - 5 = 0, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a = -11 \\ b = 5 \end{cases}$$

Szukane współczynniki wielomianu $W(x)$ wynoszą $a = -11$, $b = 5$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = -2x^3 - 7x^2 + 16x + 5$, $P(x) = x + 5$
   b) $W(x) = x^4 + 6x^3 + x^2 - 6x - 2$, $P(x) = x^2 + 6x + 2$
2. Wykonaj dzielenie z resztą wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 2x^3 + 7x^2 - 14x + 9$, $P(x) = x + 5$
   b) $W(x) = -6x^5 + 22x^3 + 6x^2$, $P(x) = 3x^2 - 5$
3. Wyznacz liczbę a, dla której reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^4 - 6x^2 + ax + 1$ przez dwumian $x + 1$ jest równa -6.
4. Wyznacz wartości współczynników a i b wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + b$ tak, aby był on podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 2x + 5$.

Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy za pomocą schematu Hornera

William G. Horner, matematyk angielski, żył na przełomie XVIII i XIX w.; zajmował się algebrą. Algorytm nazywany dziś schematem Hornera, znany był Chińczykom pięćset lat wcześniej.

Schemat Hornera dla wielomianu
$W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$, i dwumianu $(x - b)$, rozpoczynamy od ułożenia tabelki w następujący sposób:

		I	II			
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
b						
	a_n					

[illegible] reszta z dzielenia

Sposób uzupełniania wolnych miejsc tabel zaprezentujemy na przykładzie dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^4 + 2x^3 + 7x + 1$ przez dwumian $(x + 1)$.

		I	II	III	IV
	3	2	0	7	1
−1					
	3				

Zgodnie ze wzorem budujemy tabelkę $\big($zwróć uwagę, że w miejsce b wpisujemy -1, gdyż $x + 1 = x - (-1)\big)$.

		I	II	III	IV
	3	2	0	7	1
−1		−3			
	3				

Mnożymy $b \cdot a_n$ $\big($u nas: $(-1) \cdot 3\big)$ i otrzymany iloczyn zapisujemy w kolumnie I w drugim wierszu.

		I	II	III	IV
	3	2	0	7	1
−1		−3			
	3	−1			

Dodajemy liczby w I kolumnie $\big(2 + (-3)\big)$ i sumę (-1) zapisujemy w trzecim wierszu kolumny I.

		I	II	III	IV
	3	2	0	7	1
−1		−3	1		
	3	−1			

Liczbę (-1) mnożymy przez liczbę wpisaną w trzecim wierszu kolumny I $\big((-1) \cdot (-1)\big)$ i otrzymany iloczyn (1) zapisujemy w drugim wierszu kolumny II.

		I	II	III	IV
	3	2	0	7	1
-1		-3	1		
	3	-1	1		

Dodajemy liczby w II kolumnie (0 + 1) i sumę (1) zapisujemy w trzecim wierszu kolumny II.

		I	II	III	IV
	3	2	0	7	1
-1		-3	1	-1	-6
	3	-1	1	6	-5

Dalej postępujemy podobnie, aż otrzymamy uzupełnioną tabelkę.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^4 + 2x^3 + 7x + 1$ przez dwumian $(x + 1)$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 3x^3 - x^2 + x + 6$ i resztę $R(x) = -5$.
Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x + 1)$ sposobem pisemnym.

Czy dostrzegasz analogię między dzieleniem sposobem pisemnym a dzieleniem za pomocą schematu Hornera?

Przykład 1.

Wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ przez dwumian $(x - 2)$, posługując się schematem Hornera.

	1	-2	4	-8
2		2	0	8
	1	0	4	0

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ przez dwumian $(x - 2)$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = x^2 + 4$ i resztę $R(x) \equiv 0$. Zatem dwumian $(x - 2)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Stosując schemat Hornera, wykonaj dzielenie wielomianu przez podany obok dwumian:
   a) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 9x - 1$ $\quad P(x) = x + 1$
   b) $W(x) = -3x^4 + 2x^2 + 40$ $\quad P(x) = x - 2$
   c) $W(x) = -5x^3 + 4x^2 + 6x - 7$ $\quad P(x) = x + 2$
   d) $W(x) = -x^5 + 2x^3 + 4x + 6$ $\quad P(x) = x - 1$

Pierwiastek wielomianu

Wiesz, że możemy obliczyć wartość wielomianu dla dowolnej liczby rzeczywistej. W szczególności wartość wielomianu dla pewnej liczby rzeczywistej może równać się zeru. Mówimy wtedy, że liczba ta jest pierwiastkiem wielomianu.

Definicja 1.
Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy liczbę rzeczywistą a, dla której $W(a) = 0$.

Przykład 1.

Rozważmy wielomian $W(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2$. Sprawdzimy, czy któraś z liczb należących do zbioru $\{-1, 1, \sqrt{2}, 3\}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Obliczamy:

$$W(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 = 2 - 1 - 5 + 2 + 2 = 6 - 6 = 0$$
$$W(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 1 - 5 - 2 + 2 = -2$$
$$W(\sqrt{2}) = 2\left(\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{2}\right)^3 - 5\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} + 2 = 8 + 2\sqrt{2} - 10 - 2\sqrt{2} + 2 = 0$$
$$W(3) = 2 \cdot 3^4 + 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 162 + 27 - 45 - 6 + 2 = 140$$

Liczby -1 i $\sqrt{2}$ są pierwiastkami danego wielomianu.

Wielomian stopnia zerowego nie ma pierwiastków. W przypadku wielomianu zerowego każda liczba rzeczywista jest jego pierwiastkiem.

Teraz zajmiemy się pierwiastkami wielomianów stopnia większego od 2. Wyznaczymy najpierw pierwiastki wielomianu w przypadku, gdy jest on zapisany w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

Przykład 2.

Wyznaczymy pierwiastki wielomianu $W(x) = x(2x - 4)(x + 3)\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^2 + 5\right)$.

Wielomian $W(x)$ jest zapisany w postaci iloczynu wielomianów pierwszego i drugiego stopnia. Wartość wielomian $W(x)$ jest równa zeru tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy zeru, zatem:

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x - 4 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 5 = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -3 \quad \vee \quad x = -2 \vee x = 1 \qquad \text{(równanie sprzeczne)}$$

Wielomian ma wartość zero dla liczb: 2, –3, 0, –2, 1.
Wielomian $W(x)$ ma pięć pierwiastków: –3, –2, 0, 1, 2.

Zastanówmy się, ile pierwiastków może mieć wielomian stopnia n, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

Wielomian stopnia pierwszego ma jeden pierwiastek. Wielomian stopnia drugiego ma dwa pierwiastki albo jeden pierwiastek, albo w ogóle nie ma pierwiastków. Ogólnie, jeśli wielomian stopnia n ma chociaż jeden pierwiastek, to można go przedstawić jako iloczyn pewnego dwumianu pierwszego stopnia i wielomianu stopnia $(n-1)$. Z drugiej strony, wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n czynników, które są dwumianami stopnia pierwszego. Zatem liczba pierwiastków wielomianu jest ograniczona przez jego stopień. O tym informuje nas twierdzenie 1.

Twierdzenie 1.
Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej rzeczywistej jest nie większa niż stopień wielomianu $W(x)$.

Łatwo sprawdzić, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu (przykład 1.), oraz wyznaczyć pierwiastki wielomianu, jeśli jest on zapisany w postaci czynników, co najwyżej stopnia drugiego (przykład 2.). Trudniej jest znaleźć pierwiastki wielomianu danego w postaci

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$.

W niektórych sytuacjach pomocne okazuje się poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2. (o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych)
Jeżeli wielomian $W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n\ 1} \cdot x^{n\ 1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego, to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast mianownik – dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Założenie: $W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{C}$

liczba $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \boldsymbol{C}$, $q \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$

$NWD(p, q) = 1$

Teza: $p|a_0$ i $q|a_n$

Dowód:

Z założenia, że $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ otrzymujemy:

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n\ 1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n\ 1} + \ldots + a_2 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Zatem

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_2 \cdot \frac{p^2}{q^2} + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Mnożymy obie strony równości przez q^n i otrzymujemy:

(*) $a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0$

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} = -a_0 \cdot q^n$$

$$p \cdot \left(a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_2 \cdot p \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}\right) = -a_0 \cdot q^n$$

Liczba w nawiasie jest liczbą całkowitą jako suma iloczynów liczb całkowitych, więc lewa strona równości jest podzielna przez p. Zatem prawa strona równości też jest podzielna przez p, czyli iloczyn $-a_0 \cdot q^n$ jest podzielny przez p. Ponieważ $NWD(p, q) = 1$, więc $NWD(p, q^n) = 1$, a to znaczy, że p i q^n nie mają wspólnych dzielników, czyli $p \nmid q^n$. Zatem p jest dzielnikiem czynnika a_0.

Wróćmy do równości (*). Przekształcając ją, otrzymujemy:

$$-a_n \cdot p^n = q \cdot \left(a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-3} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1}\right).$$

Rozumując podobnie, dochodzimy do wniosku, że q jest dzielnikiem a_n.

Z twierdzenia 2. wynikają następujące wnioski.

Wniosek 1.: Jeżeli wielomian $W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Wniosek 2.: Jeśli wielomian $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, gdzie $a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, to jest on liczbą całkowitą będącą dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Przykład 3.

Wyznaczymy (o ile istnieją) wymierne pierwiastki wielomianu:
$W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

Wielomian $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ ma wszystkie współczynniki całkowite, więc spełnia założenie twierdzenia 2.

$p|3$, więc $p \in \{-1, 1, -3, 3\}$ oraz $q|2$, więc $q \in \{-1, 1, -2, 2\}$, zatem

$$\frac{p}{q} \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

Jeśli wielomian $W(x)$ ma pierwiastki wymierne, to znajdują się one w zbiorze

$$\left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

Sprawdźmy.

$W(1) \neq 0$ $\quad W(-1) = 0$ $\quad W\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $\quad W\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$ $\quad W(3) = 0$

Dalej już nie musimy szukać pierwiastków tego wielomianu. Wielomian jest stopnia trzeciego, więc ma co najwyżej trzy pierwiastki. Okazało się, że jego pierwiastkami są liczby: -1, $\frac{1}{2}$ oraz 3.

Wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ są wymierne.

Przykład 4.

Wyznaczymy (o ile istnieją) wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)=\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2}x^2+1$.

Nie wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)=\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2}x^2+1$ są liczbami całkowitymi, więc nie możemy zastosować twierdzenia 2. Zauważmy, że wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci

$$W(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^5-x^2+2\right), \text{ czyli } W(x)=\frac{1}{2}\cdot Q(x), \text{ gdzie } Q(x)=x^5-x^2+2.$$

Jeśli wielomian $Q(x)$ ma pierwiastki wymierne, to są one także pierwiastkami wielomianu $W(x)$ (dlaczego?). Wszystkie współczynniki wielomianu $Q(x)=x^5-x^2+2$ są liczbami całkowitymi i współczynnik przy x^5 jest równy 1, zatem jeśli wielomian $Q(x)$ ma pierwiastki wymierne, to są one liczbami całkowitymi i znajdują się wśród dzielników wyrazu 2. Zatem pierwiastków wielomianu szukamy wśród liczb: –1, 1, –2 oraz 2. Otrzymujemy:

$$Q(-1)=0 \qquad Q(1)\neq 0 \qquad Q(-2)\neq 0 \qquad Q(2)\neq 0$$

Liczba –1 jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$. Zatem wielomian $W(x)=\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2}x^2+1$ ma jeden pierwiastek wymierny – jest to liczba –1.
Zauważmy, że st.$W(x)=5$. Można więc wnioskować, że wielomian $W(x)$ ma jeszcze inne pierwiastki, które są liczbami niewymiernymi, albo liczba –1 jest jedynym jego pierwiastkiem.

Na koniec pokażemy jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Przykład 5.

Udowodnimy, że liczba $\sqrt[3]{5}$ jest niewymierna.

Zauważmy, że liczba $\sqrt[3]{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3-5$, bo

$$W\left(\sqrt[3]{5}\right)=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-5=0$$

Na podstawie wniosku 2. wiemy, że jeśli wielomian $W(x)=x^3-5$ ma pierwiastki wymierne, to należą do zbioru $\{-1, 1, -5, 5\}$. Liczba $\sqrt[3]{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i nie należy do zbioru $\{-1, 1, -5, 5\}$, więc nie jest liczbą wymierną. Zatem $\sqrt[3]{5}$ jest liczbą niewymierną.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Która z liczb: $-\sqrt{5}, -1, 0, 1, 2, \sqrt{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^4-x^3-7x^2+5x+10$?
2. Wyznacz (o ile istnieją) wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x)=x^4-6x^2+8x-3$
   b) $W(x)=2x^3-x^2+2x-1$
   c) $W(x)=\frac{1}{4}x^4-1\frac{1}{4}x^2+1$
   d) $W(x)=\frac{1}{3}x^4-x^2+\frac{1}{3}$

Twierdzenie Bezouta

O trójmianie kwadratowym wiemy już, że jeśli ma on pierwiastki, to można go przedstawić w postaci iloczynowej. Zastanowimy się teraz, czy istnieje podobny związek między pierwiastkami wielomianu a zapisem tego wielomianu w postaci iloczynowej w przypadku, gdy stopień wielomianu jest większy od 2.

W tym celu rozważmy wielomian stopnia trzeciego

$$W(x) = x^3 + 2x - 3$$

Zauważ, że jeśli $x = 1$, to wielomian ma wartość 0:

$$W(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$$

Liczba 1 jest zatem pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Teraz wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 1)$:

$$\begin{array}{l}
\quad x^2 + x + 3 \\
\hline
(x^3 + 2x - 3) : (x - 1) \\
-x^3 + x^2 \\
\hline
= \quad x^2 + 2x - 3 \\
\quad\ -x^2 + x \\
\hline
\quad = \quad 3x - 3 \\
\qquad\ -3x + 3 \\
\hline
\qquad = \quad 0
\end{array}$$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 1)$ i można go zapisać w postaci iloczynu

$$W(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 3).$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (Bezouta)
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$.

Twierdzenie Bezouta ma postać równoważności, a więc składa się z dwóch twierdzeń:

I. Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$.

II. Jeśli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Dowód twierdzenia Bezouta polega na wykazaniu prawdziwości obu twierdzeń, czyli składa się z dwóch części.

Część I.

Założenie: $W(a) = 0$, gdzie $W(x)$ jest danym wielomianem
Teza: $(x - a) \mid W(x)$

Dowód:
Z twierdzenia o rozkładzie wielomianu wiemy, że dla wielomianów $W(x)$ oraz $(x - a)$ istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, dla których

$W(x) = W(x) \cdot (x - a) + R(x)$, gdzie $R(x) \equiv 0$ lub st.$R(x) <$ st.$(x - a)$.

Ponieważ st.$(x - a) = 1$, więc reszta jest stałą; oznaczymy ją przez r.

$$W(x) = Q(x) \cdot (x - a) + r$$

Obliczamy wartość wielomianu $W(x)$ dla liczby a

$$W(a) = Q(a) \cdot (a - a) + r = r$$

Z założenia wiemy, że $W(a) = 0$ (bo a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$), zatem $r = 0$. W takim razie

$$W(x) = Q(x) \cdot (x - a),$$

czyli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$.

Część II.

Założenie: $(x - a) \mid W(x)$, gdzie $W(x)$ jest danym wielomianem
Teza: $W(a) = 0$

Dowód:
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$, więc istnieje wielomian $Q(x)$, dla którego

$$W(x) = Q(x) \cdot (x - a)$$

Obliczamy wartość wielomianu $W(x)$ dla liczby a. Otrzymujemy:

$$W(a) = Q(a) \cdot (a - a) = Q(a) \cdot 0 = 0$$

Otrzymaliśmy $W(a) = 0$, czyli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

UWAGA: Z twierdzenia Bezouta wynika, że istnienie pierwiastka a danego wielomian jest równoznaczne z podzielnością tego wielomianu przez dwumian $(x - a)$. Zatem, jeśli liczba a nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $(x - a)$. Podobnie, jeśli wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $(x - a)$, to liczba a nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Twierdzenie Bezouta jest ważnym twierdzeniem matematycznym. Ma wiele zastosowań w badaniu własności wielomianów. Niektóre z nich omówimy w poniższych przykładach.

Przykład 1.

Nie wykonując dzielenia, zbadamy, czy wielomian $W(x) = x^3 + 3x - 14$ jest podzielny przez dwumiany: $(x - 2)$ oraz $(x + 1)$.

Wystarczy obliczyć $W(2)$ oraz $W(-1)$:

$$W(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 14 = 0$$

$$W(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 14 = -18$$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, więc wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$. Liczba -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, zatem wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $(x + 1)$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian

$$W(x) = 3x^3 + (m - 4)x^2 - 5x + 2m + 3$$

jest podzielny przez dwumian $(x + 3)$.

Na podstawie twierdzenia Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x + 3)$ tylko wtedy, gdy $W(-3) = 0$. Obliczamy wartość wielomianu $W(x)$ dla liczby -3. Otrzymujemy:

$$W(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + (m - 4) \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 2m + 3 = 11m - 99$$

$W(-3) = 0$, stąd

$$11m - 99 = 0$$

$$m = 9$$

Wielomian $W(x) = 3x^3 + (m - 4)x^2 - 5x + 2m + 3$ jest podzielny przez dwumian $(x + 3)$ tylko wtedy, gdy $m = 9$.

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 2$.

Wielomian $W(x)$ ma co najwyżej cztery pierwiastki, bo st.$W(x) = 4$. Pierwiastki te (o ile istnieją) mogą być liczbami wymiernymi, jak też liczbami niewymiernymi. Wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$ są liczbami całkowitymi, więc na podstawie twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych sprawdzimy, czy dany wielomian ma pierwiastki wymierne.

Pierwiastków wymiernych szukamy wśród liczb ze zbioru

$$\left\{-1, 1, -2, 2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Obliczamy:

$$W(-1) = -3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = -3 - 4 + 6 + 3 - 2 = 0$$

Okazało się, że liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu. Zatem na mocy twierdzenia Bezouta wielomian

$W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 2$ jest podzielny przez dwumian $(x + 1)$.

W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x + 1)$ otrzymamy wielomian

$$Q(x) = -3x^3 + 7x^2 - x - 2 \quad \text{(sprawdź!)},$$

zatem

$$W(x) = (x+1) \cdot \left(-3x^3 + 7x^2 - x - 2\right)$$

Rozważamy wielomian

$$Q(x) = -3x^3 + 7x^2 - x - 2$$

Jeśli ma on pierwiastki wymierne, to znajdują się one w zbiorze $\left\{-1, 1, -2, 2 -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. Sprawdźmy:

$$Q(-1) \neq 0 \qquad Q(1) \neq 0 \qquad Q(-2) \neq 0 \qquad Q(2) = 0$$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x) = -3x^3 + 7x^2 - x - 2$, więc na mocy twierdzenia Bezouta wielomian $Q(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$. Po podzieleniu wielomianu $Q(x)$ przez $(x - 2)$ otrzymujemy wielomian

$$F(x) = -3x^2 + x + 1 \text{ (sprawdź!)}$$

Stąd

$$Q(x) = (x-2)(-3x^2 + x + 1),$$

więc

$$W(x) = (x+1)(x-2) \cdot (-3x^2 + x + 1)$$

Teraz wystarczy znaleźć pierwiastki wielomianu

$$F(x) = -3x^2 + x + 1,$$

który jest trójmianem kwadratowym. Otrzymujemy:

$$\Delta = 13$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$$

Wielomian $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 2$ ma cztery pierwiastki: -1, 2, $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$, $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

Przykład 4.

Obliczymy wartości współczynników wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 6$, wiedząc, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = (x - 2)(2x + 1)$. Wyznaczymy wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

I sposób – skorzystamy z twierdzenia Bezouta.
Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = (x - 2)(2x + 1)$, czyli $P(x) = 2(x - 2)(x + 0{,}5)$, więc jest podzielny przez każdy z dwumianów $(x - 2)$ oraz $(x + 0{,}5)$. Zatem na mocy twierdzenia Bezouta liczby 2 oraz $-0{,}5$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$, czyli $W(2) = 0$ i $W(-0{,}5) = 0$.

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2\cdot 2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2+6=0 \\ 2\cdot(-0{,}5)^3+a\cdot(-0{,}5)^2+b\cdot(-0{,}5)+6=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a+b=-11 \\ 0{,}5a-b=-11{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+2b=-22 \quad /:2 \\ 0{,}25a-0{,}5b=-5{,}75 \quad /\cdot 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-9 \\ b=7 \end{cases}$$

Wyznaczyliśmy współczynniki wielomianu $W(x)$: $a=-9$, $b=7$. Wielomian $W(x)=2x^3-9x^2+7x+6$ jest stopnia trzeciego, więc może mieć co najwyżej trzy pierwiastki. Trzeci pierwiastek wyznaczymy, korzystając ponownie z informacji, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian

$$P(x)=(x-2)(2x+1)=2x^2-3x-2$$

Wykonamy dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$:

$$\begin{array}{l} \quad x-3 \\ \hline (2x^3-9x^2+7x+6):(2x^2-3x-2) \\ -2x^3+3x^2+2x \\ \hline \quad = \quad -6x^2+9x+6 \\ \qquad\quad 6x^2-9x-6 \\ \hline \qquad\quad = \quad = \quad = \end{array}$$

Zatem

$$W(x)=(2x^2-3x-2)(x-3)=(x-2)(2x+1)(x-3)=2(x-2)(x+0{,}5)(x-3).$$

Pierwiastkami wielomianu $W(x)=2x^3-9x^2+7x+6$ są liczby $-\frac{1}{2}$, 2 oraz 3.

<u>II sposób</u> – skorzystamy z definicji równości wielomianów.

Wielomian $W(x)=2x^3+ax^2+bx+6$ jest podzielny przez wielomian $P(x)=(x-2)(2x+1)$, więc istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x)=P(x)\cdot Q(x)$. Ponieważ st.$W(x)=3$ oraz st.$P(x)=2$, więc st.$Q(x)=1$, czyli $Q(x)=mx+n$, gdzie $m\neq 0$. Zatem

$$W(x)=(x-2)(2x+1)(mx+n)=(2x^2-3x-2)(mx+n)=$$
$$=2mx^3+(2n-3m)x^2-(3n+2m)x-2n$$

Wielomiany

$$W(x)=2x^3+ax^2+bx+6 \text{ oraz } W(x)=2mx^3+(2n-3m)x^2-(3n+2m)x-2n$$

są równe, zatem:

$$\begin{cases} 2m=2 \\ 2n-3m=a \\ -(3n+2m)=b \\ -2n=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ a=-9 \\ b=7 \\ n=-3 \end{cases}$$

Wyznaczyliśmy współczynniki wielomianu $W(x)$: $a=-9$, $b=7$. Wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci iloczynowej: $W(x)=(x-2)(2x+1)(x-3)$.

Stąd pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby: $-\frac{1}{2}$, 2, 3.

<u>III sposób</u> – skorzystamy z twierdzenia o rozkładzie wielomianu.
Wykonamy dzielenie wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 6$ przez wielomian $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

$$
\begin{array}{rllll}
 & & x + \frac{1}{2}(a+3) & & \\
\hline
 & (2x^3 & + \ ax^2 + & bx + 6) : (2x^2 - 3x - 2) & \\
+ & -2x^3 & + \ 3x^2 + & 2x & \\
\hline
 & = & (a+3)x^2 + & (b+2)x + 6 & \\
 & & -(a+3)x^2 + & \frac{3}{2}(a+3)x + a + 3 & \\
\hline
 & & = & \left(b + \frac{3}{2}a + \frac{13}{2}\right)x + a + 9 &
\end{array}
$$

Ponieważ wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, więc reszta z dzielenia $R(x) = \left(b + \frac{3}{2}a + \frac{13}{2}\right)x + a + 9$ jest wielomianem zerowym. Zatem:

$$
\begin{cases} b + \frac{3}{2}a + \frac{13}{2} = 0 \\ a + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 7 \end{cases}
$$

Wyznaczyliśmy współczynniki wielomianu $W(x)$: $a = -9$, $b = 7$. W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ przez wielomian $P(x) = (x-2)(2x+1)$ otrzymaliśmy iloraz $Q(x) = x - 3$. Zatem $W(x) = (x-2)(2x+1)(x-3)$, więc jego pierwiastkami są liczby: $-\frac{1}{2}$, 2 oraz 3.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 10$ jest podzielny przez dwumian:
   a) $x + 4$ b) $x - 5$ c) $x - 1$ d) $x + 2$
2. Wyznacz wartość parametru k, dla którego wielomian $W(x) = 2x^3 + (k-1)x^2 + (1 - 3k)x + 2$ jest podzielny przez dwumian $(x + 2)$.
3. Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$, wiedząc, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x + 4)$.
4. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:
   a) $W(x) = 3x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 16x - 4$ b) $W(x) = -2x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$
5. Liczby 1 oraz 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$. Wyznacz wartości współczynników a i b oraz trzeci pierwiastek tego wielomianu.
6. Wielomian $W(x) = 3x^3 + ax^2 + 18x + b$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = (3x-1)(x+4)$. Wyznacz wartości współczynników a i b oraz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Pierwiastek wielokrotny

Załóżmy, że wielomian $W(x)$ ma pierwiastek równy 3. Wówczas jest on podzielny przez dwumian

$(x-3)$

Wielomian $W(x)$ można więc przedstawić jako

$W(x)=(x-3)\cdot Q(x)$

Ale jeśli 3 jest również pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$, to wielomian $W(x)$ można przedstawić jako

$W(x)=(x-3)^2\cdot K(x)$

Liczba 3 mogłaby być również pierwiastkiem wielomianu $K(x)$. Wtedy wielomian $W(x)$ można by było przedstawić jako

$W(x)=(x-3)^3\cdot L(x)$

Przypuśćmy jednak, że nasz wielomian $W(x)$ jest iloczynem $(x-3)^2\cdot K(x)$ i liczba 3 nie jest pierwiastkiem wielomianu $K(x)$. Czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-3)^3$? Oczywiście, nie.

Nasze rozważania prowadzą do definicji pierwiastka wielokrotnego.

Definicja 1.
Pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $W(x)$ (gdzie $k\in N_+$) nazywamy liczbę a wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy **krotnością pierwiastka**.

Wróćmy do naszego wielomianu $W(x)$. Jest on podzielny przez wielomian $(x-3)^2$ i nie jest podzielny przez wielomian $(x-3)^3$. Zatem liczba 3 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)$.

Przykład 1.

Wskażemy wielomian $W(x)$ stopnia szóstego, który ma tylko dwa pierwiastki: -5 oraz 7, przy czym obydwa pierwiastki są dwukrotne.

Zgodnie z definicją pierwiastka dwukrotnego, wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x+5)^2$ oraz przez $(x-7)^2$, natomiast nie jest podzielny przez $(x+5)^3$ ani przez $(x-7)^3$. Wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci iloczynu.

$W(x)=(x+5)^2(x-7)^2\cdot Q(x)$

Wielomian $Q(x)$ nie może mieć pierwiastków (dlaczego?). Ponieważ st.$W(x)=6$, więc st.$Q(x)=2$. Wielomianem $Q(x)$ może być dowolny wielomian stopnia 2, który nie ma pierwiastków, np.:

$Q(x)=x^2+9$

Wielomian $W(x)=(x+5)^2(x-7)^2(x^2+9)$ spełnia warunki zadania.

Przykład 2.

Pokażemy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, i zbadamy krotność tego pierwiastka.

Sprawdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Otrzymujemy:

$$W(1) = 1^4 - 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 0$$

Zatem na mocy twierdzenia Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-1)$. Po wykonaniu dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ (wykonaj je samodzielnie), otrzymujemy iloraz:

$$F(x) = x^3 - 3x + 2$$

Zatem

$$W(x) = (x-1) \cdot \underbrace{(x^3 - 3x + 2)}_{F(x)}$$

Sprawdzamy, czy liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $F(x) = x^3 - 3x + 2$:

$$F(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

Dzielimy więc wielomian $F(x)$ przez dwumian $(x-1)$ i otrzymujemy wielomian

$G(x) = x^2 + x - 2$, zatem

$$W(x) = (x-1) \cdot (x-1) \cdot \overbrace{(x^2 + x - 2)}^{G(x)}$$

Trójmian kwadratowy $G(x) = x^2 + x - 2$ możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$G(x) = (x-1)(x+2)$$

Ostatecznie wielomian $W(x)$ można przedstawić w postaci:

$$W(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^3(x+2)$$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-1)^3$. Nie jest natomiast podzielny przez $(x-1)^4$, bo liczba 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x) = x + 2$.
Liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 3.

Wykażemy, że liczba 4 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$.

Aby udowodnić, że liczba 4 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, wystarczy pokazać, że:

- wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-4)^2$
- i wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez wielomian $(x-4)^3$.

Wykonujemy dzielenie

$W(x) : (x-4)^2$, czyli $W(x) : (x^2 - 8x + 16)$.

Po podzieleniu otrzymujemy iloraz $(x+1)$ i resztę $R(x) \equiv 0$ (sprawdź!).

Pokazaliśmy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x-4)^2$. Pozostaje jeszcze wykazać, że wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez $(x-4)^3$.

Wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci

$$W(x) = (x-4)^2 \cdot (x+1)$$

Żeby wielomian $W(x)$ był podzielny przez $(x-4)^3$, to wielomian $(x+1)$ musiałby być podzielny przez $(x-4)$. Ale reszta z dzielenia wielomianu $(x+1)$ przez $(x-4)$ jest równa 5 (oblicz!), więc wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez $(x-4)^3$.
Wykazaliśmy, że liczba 4 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wartości parametrów m i n, wiedząc, że wielomian $W(x) = 27x^3 + mx^2 + 36x + n$ ma pierwiastek trzykrotny. Podamy ten pierwiastek.

Niech p – oznacza trzykrotny pierwiastek wielomianu $W(x)$. Ponieważ st.$W(x) = 3$, więc wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci $W(x) = 27(x-p)^3$.
Stąd, po zastosowaniu wzoru na sześcian różnicy dwóch wyrażeń, otrzymujemy:

$$W(x) = 27x^3 - 81px^2 + 81p^2x - 27p^3$$

Na podstawie definicji równości wielomianów mamy:

$$\begin{cases} m = -81p \\ 36 = 81p^2 \\ n = -27p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -81p \\ p^2 = \dfrac{4}{9} \\ n = -27p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 54 \\ p = -\dfrac{2}{3} \\ n = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -54 \\ p = \dfrac{2}{3} \\ n = -8 \end{cases}$$

Istnieją dwa wielomiany spełniające warunki zadania.

- Jeśli $m = 54$ i $n = 8$, wówczas wielomian ma postać $W(x) = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$, a liczba $-\dfrac{2}{3}$ jest jego trzykrotnym pierwiastkiem.
- Jeśli $m = -54$ i $n = -8$, wówczas trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ jest liczba $\dfrac{2}{3}$.

Przykład 5.

Dany jest wielomian $W(x) = (x-1)(x^2 - (p+1)x + 4)^2$ z parametrem p. Ustalimy krotność pierwiastków tego wielomianu ze względu na wartość parametru p.

Wielomian $W(x) = (x-1)[Q(x)]^2$, gdzie $Q(x) = x^2 \quad (p+1)x + 4$. Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest liczba 1; liczba pozostałych jego pierwiastków zależy od wartości parametru p.

Rozpatrzymy zatem trzy przypadki ze względu na wyróżnik trójmianu $Q(x) = x^2 - (p+1)x + 4$

$$\Delta = [-(p+1)]^2 - 16 = (p+1)^2 - 16 = (p+1-4)(p+1+4) = (p-3)(p+5)$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow p \in (-5, 3)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow p \in \{-5, 3\}$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$$

<u>I przypadek</u>

Jeśli $p \in (-5, 3)$, to wielomian $Q(x)$ nie ma pierwiastków ($\Delta < 0$), więc wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny (liczba 1).

<u>II przypadek</u>

Jeśli $p \in \{-5, 3\}$, to wielomian $Q(x)$ ma jeden pierwiastek dwukrotny

- jeśli $p = -5$, to otrzymujemy $Q(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, zatem wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny (1) oraz jeden pierwiastek czterokrotny (–2);
- jeśli $p = 3$, to otrzymujemy $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, zatem wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny (1) oraz jeden pierwiastek czterokrotny (2).

<u>III przypadek</u>

Jeśli $p \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$, to wielomian $Q(x)$ ma dwa pierwiastki jednokrotne. Sprawdzimy, czy istnieje wśród nich pierwiastek równy 1. Obliczamy $Q(1)$:

$$Q(1) = 1^2 - (p+1)\cdot 1 + 4 = -p + 4$$

$$Q(1) = 0 \Leftrightarrow p = 4$$

Stąd otrzymujemy

- Jeśli $p = 4$, to jednym z pierwiastków wielomianu $Q(x)$ jest liczba 1, zaś drugi jest różny od 1. Wówczas wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek trzykrotny (1) i jeden dwukrotny.
- Jeśli $p \in (-\infty, -5) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$, to oba pierwiastki wielomianu $Q(x)$ są różne od 1 i wtedy wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny (1) oraz dwa pierwiastki, każdy o krotności dwa.

Podsumujmy nasze spostrzeżenia.

Wielomian $W(x) = (x-1)(x^2 - (p+1) + 4)^2$ ma:

- jeden pierwiastek jednokrotny wtedy, gdy $p \in (-5, 3)$
- jeden pierwiastek jednokrotny oraz jeden pierwiastek czterokrotny wtedy, gdy $p \in \{-5, 3\}$
- jeden pierwiastek trzykrotny i jeden dwukrotny wtedy, gdy $p = 4$
- jeden pierwiastek jednokrotny i dwa pierwiastki dwukrotne wtedy, gdy $p \in (-\infty, -5) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = 7(x^2 + 6x + 9)(x+3)^2(x^2 - 81)$ i określ krotność każdego z nich.
2. Zbadaj krotność pierwiastka 2 wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$.
3. Wykaż, że liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 3$.
4. Ustal krotność pierwiastków wielomianu $W(x) = (x+2)(x^2 + 2mx + 4)$ ze względu na wartość parametru m.

Rozkładanie wielomianów na czynniki

Ważną umiejętnością jest rozkładanie wielomianów na czynniki. Szczególnie przydaje się ona podczas rozwiązywania równań wielomianowych, które omówimy w następnym temacie.

Rozpatrzmy dwa wielomiany stopnia drugiego:

$$W(x) = (3x + 6)(x - 5) \quad \text{i} \quad G(x) = x^2 + 2.$$

Wielomian $W(x)$ jest przedstawiony w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia pierwszego. Czy wielomian $G(x)$ też można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych? Z własności funkcji kwadratowych wynika, że nie. Można go jedynie przedstawić w postaci iloczynu stałej i innego wielomianu stopnia drugiego, np.:

$$G(x) = 2(0{,}5x^2 + 1)$$

Definicja 1.
Wielomianem rozkładalnym nazywamy wielomian różny od wielomianu zerowego wtedy, gdy można go przedstawić w postaci iloczynu wielomianów mających stopień różny od zera. W przeciwnym wypadku wielomian nazywamy **wielomianem nierozkładalnym**.

Zgodnie z powyższą definicją, wielomian $W(x) = (3x + 6)(x - 5)$ jest wielomianem rozkładalnym, natomiast wielomian $G(x) = x^2 + 2$ jest wielomianem nierozkładalnym.

Rozkład wielomianu na czynniki polega zatem na przedstawieniu tego wielomianu w postaci iloczynu przynajmniej dwóch wielomianów, z których każdy ma stopień większy od zera.

Zauważ, że wielomian $W(x) = (3x + 6)(x - 5)$ można przedstawić również w postaci

$$W(x) = 3(x + 2)(x - 5) \quad \text{oraz} \quad W(x) = (x + 2)(3x - 15)$$

Takie rozkłady jednego wielomianu, w których czynniki różnią się tylko czynnikiem stałym, uważamy ze jednakowe.

Omówimy teraz, które wielomiany są rozkładalne.

Z definicji wielomianu rozkładalnego wynika, że taki wielomian ma stopień równy co najmniej 2. Zatem wszystkie wielomiany stałe i wielomiany stopnia pierwszego są nierozkładalne. Przyjrzymy się wielomianom stopnia drugiego. Niektóre z nich są rozkładalne, a niektóre nie. Rozkładalne trójmiany kwadratowe to takie, które można przedstawić w postaci iloczynu dwóch czynników liniowych, czyli takie, których wyróżnik jest nieujemny ($\Delta \geqslant 0$). Nierozkładalne trójmiany kwadratowe mają wyróżnik ujemny ($\Delta < 0$).

W wypadku wielomianów stopnia większego niż 2 prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Rozkład ten jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności czynników i do stałej).

Tak więc wszystkie wielomiany stopnia trzeciego, czwartego, piątego i wyższych stopni są rozkładalne. Wielomiany staramy się zawsze rozłożyć na czynniki liniowe (pierwszego stopnia) lub czynniki stopnia drugiego, które są nierozkładalne.

Twierdzenie 1. nie daje sposobu, za pomocą którego moglibyśmy wszystkie wielomiany co najmniej trzeciego stopnia rozłożyć na czynniki. Rozkładanie wielomianu na czynniki bywa nieraz bardzo skomplikowane.

Przypomnijmy sposoby, które poznałeś w klasie pierwszej.

Wielomiany można rozkładać na czynniki, stosując następujące metody:
- wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias
- stosowanie wzorów skróconego mnożenia
- grupowanie wyrazów wielomianu.

Każdą z tych metod omówimy w kolejnych przykładach.

Przykład 1.

Rozłożymy wielomiany na czynniki, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.

a) $W(x) = 2x^5 + 6x^4 = 2x^4 \cdot x + 2x^4 \cdot 3 = 2x^4(x+3)$
$W(x) = 2x^4(x+3)$

b) $W(x) = -12x^8 + 6x^7 - 24x^6 = -6x^6 \cdot 2x^2 - 6x^6 \cdot (-x) - 6x^6 \cdot 4 = -6x^6 \cdot (2x^2 - x + 4)$
czynnik $2x^2 - x + 4$ jest nierozkładalny, bo jego wyróżnik jest ujemny
$W(x) = -6x^6(2x^2 - x + 4)$

Przykład 2.

Rozłożymy wielomiany na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
$W(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1)$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$W(x) = x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2+5)^2 = (x^2+5)(x^2+5)$
czynnik $x^2 + 5$ jest nierozkładalny

c) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$W(x) = x^4 - 81 = (x^2-9)(x^2+9) = (x-3)(x+3)(x^2+9)$

czynnik x^2+9 jest nierozkładalny

d) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$W(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3 = (x+2)(x+2)(x+2)$

e) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3$

$W(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x-1)^3 = (2x-1)(2x-1)(2x-1)$

f) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$W(x) = x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

czynnik $x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny

g) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$W(x) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

czynnik $x^2 + 3x + 9$ jest nierozkładalny.

Przykład 3.

Rozłożymy wielomiany na czynniki poprzez grupowanie wyrazów i szukanie wspólnego czynnika (tych grup), który można wyłączyć poza nawias.

a) $W(x) = 4x^3 + 20x^2 - x - 5 =$

$= (4x^3 + 20x^2) + (-x-5) = 4x^2 \cdot (x+5) - 1 \cdot (x+5) =$

$= (x+5) \cdot (4x^2 - 1) = (x+5) \cdot (2x-1) \cdot (2x-1)$

$W(x) = (x+5)(2x-1)(2x+1)$

b) $W(x) = x^3 - 7x + 6 =$

$= x^3 - x - 6x + 6 = (x^3 - x) + (-6x + 6) = x \cdot (x^2 - 1) - 6 \cdot (x-1) =$

$= x \cdot (x-1) \cdot (x+1) - 6 \cdot (x-1) = (x-1) \cdot [x \cdot (x+1) - 6] = (x-1) \cdot [x^2 + x - 6]$

Łatwo stwierdzić, że

$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

Zatem

$W(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

Do rozkładania wielomianu na czynniki można wykorzystać również informację o jego pierwiastkach.

Jeśli znamy pierwiastek a wielomianu, to z twierdzenia Bezouta wynika, że w rozkładzie na czynniki tego wielomianu występuje czynnik $(x - a)$. Wykonując dzielenie wielomianu przez $(x - a)$, otrzymujemy iloraz, który jest drugim czynnikiem tego rozkładu. Dodatkowa informacja o krotności tego pierwiastka może jeszcze bardziej ułatwić nam zadanie rozłożenia wielomianu na czynniki.

Przykład 4.

Rozłożymy wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$ na czynniki, wiedząc, że liczba (-1) jest jego pierwiastkiem dwukrotnym.

Liczba (-1) jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)$, więc wielomian ten jest podzielny przez wielomian

$$P(x) = (x+1)^2$$

Wykonując dzielenie wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$, otrzymamy iloraz

$$Q(x) = x^2 - 3 \qquad \text{(sprawdź!)}, \qquad \text{stąd}$$

$$W(x) = (x+1)^2\left(x^2 - 3\right)$$

Trójmian kwadratowy $(x^2 - 3)$ rozkładamy na czynniki liniowe.

$$\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$$

Rozkład wielomianu $W(x)$ na czynniki jest następujący:

$$W(x) = (x+1)^2\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$$

Jeśli nie potrafimy rozłożyć wielomianu za pomocą metod przedstawionych w przykładach 1–3 ani nie znamy żadnego pierwiastka wielomianu, to możemy spróbować sami odnaleźć chociaż jeden jego pierwiastek i postępować według rozumowania przedstawionego w przykładzie 4. W tej sytuacji pomocne jest twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych lub wnioski z tego twierdzenia dotyczące całkowitych pierwiastków tego wielomianu.

Przykład 5.

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = 6x^4 - 5x^3 + 25x^2 - 20x + 4$.

Wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$ są liczbami całkowitymi. Jeśli więc istnieje pierwiastek wymierny tego wielomianu, to należy do zbioru:

$$\left\{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}.$$

Wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych (sprawdź!).

Niecałkowitym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest liczba $\frac{1}{2}$, bo

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 20 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{6}{16} - \frac{5}{8} + \frac{25}{4} - 10 + 4 =$$

$$= \frac{6 - 10 + 100}{16} - 6 = \frac{96}{16} - 6 = 6 - 6 = 0$$

Na podstawie twierdzenia Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Po wykonaniu dzielenia otrzymujemy iloraz $Q(x) = 6x^3 - 2x^2 + 24x - 8$ (sprawdź!).

Zatem

$$W(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(6x^3-2x^2+24x-8\right)$$

Teraz możemy postąpić dwojako:

1) poszukać pierwiastka wymiernego wielomianu
$$Q(x)=6x^3-2x^2+24x-8,$$
stosując twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych, następnie podzielić wielomian $Q(x)$ przez dwumian $(x-a)$, gdzie a jest znalezionym pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$; w wyniku dzielenia otrzymamy wielomian $F(x)$ – stopnia drugiego, z którym już potrafimy sobie poradzić;
2) rozłożyć wielomian
$$Q(x)=6x^3-2x^2+24x-8,$$
stosując metodę grupowania wyrazów.

Drugi sposób szybciej doprowadzi nas do celu.

$$Q(x)=6x^3-2x^2+24x-8=2x^2(3x-1)+8(3x-1)=(3x-1)\left(2x^2+8\right)=$$
$$=2(3x-1)\left(x^2+4\right)$$

Czynnik $\left(x^2+4\right)$ jest nierozkładalny.

Ostatecznie:

$$W(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot(3x-1)\left(x^2+4\right)=(2x-1)(3x-1)\left(x^2+4\right)$$

Zastanowimy się teraz, czy każdy wielomian stopnia większego niż dwa ma chociaż jeden pierwiastek.

W przypadku wielomianów stopnia nieparzystego wielomian zawsze ma przynajmniej jeden pierwiastek. Wynika to z tego, że każdy wielomian można rozłożyć na czynniki co najwyżej stopnia drugiego, więc przynajmniej jeden czynnik w tym rozkładzie jest stopnia pierwszego.

Jeśli stopień wielomianu jest parzysty, to może się zdarzyć, że wielomian nie ma pierwiastków. Przykładem takiego wielomianu jest chociażby wielomian czwartego stopnia:

$$W(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)$$

Jeśli chcemy rozłożyć na czynniki wielomian, który nie ma pierwiastków, to możemy stosować tylko: wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów i wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias.

Przykład 6.

Rozłożymy na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + 9$.

Doprowadzamy wzór wielomianu do postaci, w której można wykorzystać wzór skróconego mnożenia $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

$$W(x) = x^4 + 9 = x^4 + 6x^2 - 6x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - 6x^2 = (x^2+3)^2 - (\sqrt{6}x)^2$$

Otrzymaliśmy różnicę kwadratów dwóch wyrażeń, więc korzystamy ze wzoru

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$W(x) = (x^2 + 3 - \sqrt{6}x)(x^2 + 3 + \sqrt{6}x),$$

czyli

$$W(x) = (x^2 - \sqrt{6}x + 3)\,(x^2 + \sqrt{6}x + 3)$$

Czynniki $x^2 - \sqrt{6}x + 3$ oraz $x^2 + \sqrt{6}x + 3$ są nierozkładalne $(\Delta < 0)$.

Po rozłożeniu wielomianu $W(x) = x^4 + 9$ na czynniki otrzymaliśmy wielomian

$$W(x) = (x^2 - \sqrt{6}x + 3)(x^2 + \sqrt{6}x + 3)$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozłóż na czynniki następujące wielomiany, stosując wzory skróconego mnożenia:
   a) $W(x) = 4x^4 - 81$ b) $W(x) = x^3 - 8$
   c) $W(x) = 125x^3 + 1$ d) $W(x) = x^6 + 1$
2. Rozłóż na czynniki następujące wielomiany, stosując metodę grupowania wyrazów:
   a) $W(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ b) $W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$
   c) $W(x) = x^3 + 6x + 7$ d) $W(x) = x^3 - 2x + 1$
3. Rozłóż na czynniki następujące wielomiany:
   a) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ b) $W(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$
   c) $W(x) = 2x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 9x + 6$ d) $W(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$
4. Rozłóż na czynniki wielomian $W(x) = 3x^4 + 12$.

Równania wielomianowe

Potrafisz już rozwiązywać równania liniowe i kwadratowe. Są to równania wielomianowe stopnia pierwszego i stopnia drugiego.

Definicja 1.

Równaniem wielomianowym stopnia n nazywamy równanie, które można przekształcić równoważnie do postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n ($n \in \mathbb{N}$).

Omówimy rozwiązywanie równań wielomianowych stopnia co najmniej trzeciego. Równanie wielomianowe doprowadzimy do postaci $W(x) = 0$; wówczas rozwiązaniami tego równania będą wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$. Jeśli wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków, to równanie nie ma rozwiązań.

Żeby wyznaczyć pierwiastki wielomianu $W(x)$, wygodnie jest rozłożyć ten wielomian na czynniki. Wiemy, że każdy wielomian stopnia większego niż drugi można rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego lub stopnia drugiego (chociaż jest to czasem bardzo skomplikowane). A z takimi wielomianami umiesz sobie poradzić.

Metodę rozwiązywania równań wielomianowych ilustrują poniższe przykłady.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $3(x+5)(x-7)(4x-9)=0$.

Równanie ma postać

$W(x)=0$, gdzie

$W(x)=3(x+5)(x-7)(4x-9)$

Wielomian $W(x)$ jest iloczynem czynników liniowych, zatem $W(x) = 0$ tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy zeru. Zatem

$$x+5=0 \ \vee \ x-7=0 \ \vee \ 4x-9=0,$$

stąd

$$x=-5 \quad \vee \quad x=7 \quad \vee \quad x=2\frac{1}{4}$$

Równanie ma trzy rozwiązania: -5, $2\frac{1}{4}$ oraz 7.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $x^4=-4x^2-4x^3$.

Równanie najpierw uporządkujemy, czyli doprowadzimy do postaci $W(x)=0$.

$$x^4+4x^3+4x^2=0$$

Zauważamy, że ze wszystkich wyrazów wielomianu można wyłączyć wspólny czynnik x^2.

$$x^2(x^2+4x+4)=0$$

Do wyrażenia w nawiasie stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$$x^2(x+2)^2=0$$

Po rozłożeniu wielomianu na czynniki wnioskujemy, że:

$$x^2=0 \lor (x+2)^2=0$$
$$x=0 \lor x+2=0$$
$$x=0 \lor x=-2$$

Równanie ma dwa rozwiązania: 0 oraz –2.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $5x^3-15x^2=x-3$.

Porządkujemy równanie i otrzymujemy

$$5x^3-15x^2-x+3=0$$

Grupujemy wyrazy.

$$5x^2(x-3)-(x-3)=0$$

Wspólny czynnik wyłączamy poza nawias.

$$(x-3)(5x^2-1)=0$$

Wielomian stopnia drugiego rozkładamy za pomocą wzoru skróconego mnożenia.

$$(x-3)\left[(\sqrt{5}x)^2-1^2\right]=0$$
$$(x-3)(\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1)=0$$
$$x-3=0 \lor \sqrt{5}x-1=0 \lor \sqrt{5}x+1=0$$
$$x=3 \lor x=\frac{\sqrt{5}}{5} \lor x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Równanie ma trzy rozwiązania: 3, $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie całkowite wartości a, dla których liczba 2 jest rozwiązaniem równania

$$x^4-(a+2)x^3+3x^2-3x+2a^3=0$$

z niewiadomą x.

Ponieważ liczba 2 jest rozwiązaniem równania, więc

$$2^4-(a+2)\cdot 2^3+3\cdot 2^2-3\cdot 2+2a^3=0,$$

skąd otrzymujemy równanie z niewiadomą a.

$$a^3-4a+3=0, \text{ gdzie } a\in C$$

Równanie to można rozwiązać na dwa sposoby.

I sposób
Grupujemy wyrazy równania tak, aby miały wspólny czynnik, i rozkładamy lewą stronę na czynniki.

$$a^3 - a - 3a + 3 = 0$$
$$a\left(a^2 - 1\right) - 3(a - 1) = 0$$
$$a(a - 1)(a + 1) - 3(a - 1) = 0$$
$$(a - 1)\left(a^2 + a - 3\right) = 0$$
$$a - 1 = 0 \ \vee \ a^2 + a - 3 = 0$$
$$\Delta = 1 + 4 \cdot 3 = 13, \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$
$$a = 1 \quad \vee \quad a = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad a = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

Jedyną liczbą całkowitą spełniającą równanie $a^3 - 4a + 3 = 0$ jest liczba 1.

II sposób
Korzystamy z twierdzenia o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.
Jeśli wielomian

$$W(a) = a^3 - 4a + 3$$

ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego, czyli liczby 3.
Całkowitych pierwiastków możemy szukać jedynie wśród liczb: 1, –1, 3, –3.

$$W(1) = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$W(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 3 = 6 \neq 0$$
$$W(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 + 3 = 18 \neq 0$$
$$W(-3) = (-3)^3 - 4 \cdot (-3) + 3 = -12 \neq 0$$

Jedynym całkowitym pierwiastkiem wielomianu $W(a)$ jest liczba 1.

Jeśli $a = 1$, to liczba 2 jest rozwiązaniem równania $x^4 - (a + 2)x^3 + 3x^2 - 3x + 2a^3 = 0$.

Na koniec udowodnimy wzory Viète'a dla równania stopnia trzeciego i pokażemy ich zastosowanie.

Twierdzenie 1.
Jeśli x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, to

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = q \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r \end{cases}$$

Założenie: x_1, x_2, x_3 – rozwiązania równania $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

Teza:
$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = q$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$$

Dowód: Skoro x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

więc są pierwiastkami wielomianu

$$W(x)=x^3+px^2+qx+r$$

Wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$W(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, stąd

$$W(x)=\left(x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2\right)(x-x_3)=\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right](x-x_3)=$$
$$=x^3-(x_1+x_2)x^2+x_1x_2x-x_3x^2+(x_1+x_2)x_3x-x_1x_2x_3=$$
$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$$

Z definicji równości wielomianów otrzymujemy:

$x_1+x_2+x_3=-p \quad \wedge \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q \quad \wedge \quad x_1x_2x_3=-r,$ co kończy dowód.

Przykład 5.

Wyznaczymy wartości parametrów m i n oraz rozwiązania x_1, x_2, x_3 równania

$$x^3+6x^2+mx+n=0,$$

jeśli wiadomo, że $x_2=x_1+3$ oraz $x_3=x_1+6$.

Ze wzorów Viète'a dla równania stopnia trzeciego wiemy, że:

$x_1+x_2+x_3=-6$ i $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m,$ i $x_1x_2x_3=-n.$

Z pierwszego równania otrzymujemy:

$x_1+(x_1+3)+(x_1+6)=-6,$ skąd $3x_1+9=-6,$ czyli

$x_1=-5$

Teraz możemy obliczyć pozostałe rozwiązania równania i wartości parametrów:

$x_2=-5+3=-2$ $\qquad x_3=-5+6=1$

$m=(-5)\cdot(-2)+(-5)\cdot 1+(-2)\cdot 1=3$ oraz

$n=-(-5)\cdot(-2)\cdot 1=-10$

Liczby -5, -2 oraz 1 są rozwiązaniami danego równania; wartości parametrów wynoszą: $m=3$, $n=-10$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:
   a) $x\left(x^3-1\right)(3x-5)\left(2x^3+3\right)=0$ b) $2x^2\left(x^2-3\right)\left(x^2-4x+4\right)=0$
   c) $4x^5-4x^4+x^3=0$ d) $3x^8-2x^4-1=0$

2. Rozwiąż równania:
   a) $x^3-3x^2=4x-12$ b) $x^3-5x^2=-10+2x$
   c) $x^3-7x-6=0$ d) $x^3+3x+4=0$

3. Równanie $x^3+7x^2+mx+n=0$ ma trzy rozwiązania x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2=2x_1$, $x_3=4x_1$. Wyznacz rozwiązania tego równania oraz wartości parametrów m i n.

Zadania prowadzące do równań wielomianowych

Rozwiążemy przykładowe zadania, w których wykorzystuje się równania wielomianowe stopnia co najmniej trzeciego. Równania wielomianowe rozwiązuje się różnymi sposobami. Powtórzymy niektóre z tych sposobów. Spróbuj każde równanie rozwiązać metodą inną od tej zaprezentowanej.

Przykład 1.

a) Wyznaczymy wartość parametru a tak, aby liczba (-1) była pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^4 + \left(a^3 + 5a^2 + a\right)x^2 + 4$$

b) Wyznaczymy pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$ dla ustalonego wcześniej parametru a.

Ad a) Analiza:

Liczba (-1) jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy, gdy $W(-1) = 0$.

$$W(-1) = (-1)^4 + \left(a^3 + 5a^2 + a\right) \cdot (-1)^2 + 4 = 1 + a^3 + 5a^2 + a + 4 = a^3 + 5a^2 + a + 5$$

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$a^3 + 5a^2 + a + 5 = 0$$
$$\left(a^3 + 5a^2\right) + (a + 5) = 0$$
$$a^2(a + 5) + 1(a + 5) = 0$$
$$(a + 5)\left(a^2 + 1\right) = 0$$
$$a + 5 = 0 \quad \vee \quad a^2 + 1 = 0 \quad \text{(równanie sprzeczne)}$$
$$a = -5$$

Sprawdzenie:

Jeśli $a = -5$, to wielomian ma postać $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ i wówczas $W(-1) = 1 - 5 + 4 = 0$.

Ad b) Wielomian $W(x)$ można rozłożyć na czynniki na kilka sposobów. Zauważmy na przykład, że wyrazy wielomianu zawierają parzyste potęgi zmiennej x. Zatem wykonajmy podstawienie $x^2 = t$. Otrzymujemy wielomian $W(t)$.

$$W(t) = t^2 - 5t + 4$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego.

$$\Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3, t_1 = 1, t_2 = 4$$
$$W(t) = (t - 1)(t - 4),$$

stąd

$$W(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right)$$
$$W(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$$
$$(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2$$

Odpowiedź:
Jeśli $a = -5$, to wielomian ma postać $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ i liczba (-1) jest jego pierwiastkiem. Pozostałymi pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ są liczby: -2, 1 oraz 2.

Przykład 2.

Wyznaczymy liczbę rzeczywistą, która ma taką własność: iloczyn kwadratu tej liczby i kwadratu liczby o 1 od niej większej wynosi 144.

Analiza:
x – szukana liczba
$x + 1$ – szukana liczba powiększona o 1
x^2, $(x + 1)^2$ – kwadraty obu liczb
$x^2 \cdot (x + 1)^2$ – iloczyn kwadratów liczb

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$x^2 \cdot (x+1)^2 = 144$$
$$[x(x+1)]^2 - 12^2 = 0$$
$$[x(x+1) - 12] \cdot [x(x+1) + 12] = 0$$
$$(x^2 + x - 12) \cdot (x^2 + x + 12) = 0$$
$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x + 12 = 0$$
$$\Delta = 49 \qquad \Delta = -47, \quad -47 < 0$$
$$x_1 = -4 \text{ i } x_2 = 3$$

Sprawdzenie:
- Jeśli szukana liczba jest równa (-4), to liczbą o 1 od niej większą jest (-3).

Wówczas iloczyn kwadratów tych liczb jest równy:

$$(-4)^2 \cdot (-3)^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

- Sprawdź, że warunki zadania spełnia także liczba 3.

Odpowiedź:
Dwie liczby spełniają warunki zadania: (-4) oraz 3.

Przykład 3.

Prostopadłościenne pudełko o podstawie kwadratowej ma objętość równą 32 dm^3. Wyznaczmy wymiary pudełka, wiedząc, że krawędź boczna jest o 6 dm dłuższa od krawędzi podstawy.

Analiza:
x – długość krawędzi podstawy pudełka (dm); $x > 0$
$x + 6$ – wysokość pudełka (dm)
$x^2 \cdot (x + 6)$ – objętość pudełka (dm^3)
32 – objętość pudełka (dm^3)

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$x^2 \cdot (x+6) - 32 = 0$$
$$x^3 + 6x^2 - 32 = 0$$

Grupujemy wyrazy.

$$x^3 + 4x^2 + 2x^2 - 32 = 0$$
$$x^2(x+4) + 2(x^2 - 16) = 0$$
$$x^2(x+4) + 2(x-4)(x+4) = 0$$

Wyłączamy wspólny czynnik.

$$(x+4)[x^2 + 2(x-4)] = 0$$
$$(x+4)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

Zapisujemy trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

$$(x+4)(x+4)(x-2) = 0$$
$$(x+4)^2(x-2) = 0$$

Rozwiązujemy równanie.

$$(x+4)^2 = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0$$
$$x+4 = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0$$
$$x = -4 \quad \vee \quad x = 2$$

Liczba (–4) nie spełnia założenia $x > 0$.

Sprawdzenie:
Pudełko o wymiarach 2 dm na 2 dm na 8 dm ma objętość 32 dm^3.

Odpowiedź:
Pudełko ma wymiary: 2 dm na 2 dm na 8 dm.

Przykład 4.

Z kawałka modeliny o objętości 108π cm^3 wykonano kulę i podstawkę pod tę kulę w kształcie walca, mającego wysokość 2 cm. Wiedząc, że promień podstawy walca był dwa razy dłuższy od promienia kuli, obliczymy objętość kuli i objętość podstawki.

Analiza:

R – promień kuli (cm), $R > 0$

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ – wzór na objętość kuli

$h = 2$ – wysokość walca (cm)

r – promień podstawy walca

$r = 2R$

$V_2 = \pi r^2 \cdot h$ – wzór na objętość walca

$V_2 = 8\pi R^2$

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 + 8\pi R^2 = 108\pi \qquad / : 4\pi$$

$$\frac{1}{3}R^3 + 2R^2 = 27 \qquad / \cdot 3$$

Porządkujemy równanie.

$$R^3 + 6R^2 - 81 = 0$$

Poszukajmy najpierw dodatniego, całkowitego pierwiastka wielomianu

$$W(R) = R^3 + 6R^2 - 81$$

(może być wśród liczb 1, 3, 9, 27, 81).

$$W(1) < 0 \qquad W(3) = 27 + 6 \cdot 9 - 81 = 0$$

Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(R)$. Wielomian $W(R)$ jest podzielny przez dwumian $(R-3)$.

Dzielimy wielomian $W(R)$ przez $(R-3)$.

$$\begin{array}{l}
\quad R^2 + 9R + 27 \\
\hline
(R^3 + 6R^2 - 81) : (R-3) \\
\underline{-R^3 + 3R^2} \\
= \quad 9R^2 - 81 \\
\quad\ \underline{-9R^2 + 27R} \\
\quad\ = \quad 27R - 81 \\
\quad\quad\quad \underline{-27R + 81} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Równanie przyjmuje postać:

$$(R-3)(R^2 + 9R + 27) = 0$$

$$R - 3 = 0 \ \vee \ R^2 + 9R + 27 = 0$$

$$R = 3 \qquad \Delta = -27 \text{ (trójmian nie ma pierwiastków)}$$

Jedynym rozwiązaniem równania $R^3 + 6R^2 - 81 = 0$ jest liczba 3.

Sprawdzenie:

Jeśli promień kuli jest równy 3 (cm), wówczas objętość kuli wynosi 36π (cm^3). Objętość podstawki w kształcie walca jest równa 72π (cm^3), a suma objętości obu brył 108π (cm^3) (bo $36\pi + 72\pi = 108\pi$).

Odpowiedź:

Objętość kuli wynosiła 36π cm^3, a objętość podstawki 72π cm^3.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest równy –48. Wyznacz te liczby.
2. Iloczyn kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby o 4 od niej większej jest równy 441. Wyznacz te liczby.
3. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + (2a^3 - 4a^2 + 16a)x^2 + 3x$ przez dwumian $(x-1)$ wynosi 4.
   a) Wyznacz a.
   b) Dla znalezionej wartości a oblicz miejsca zerowe wielomianu $W(x)$.

Równania wielomianowe z parametrem

Rozwiązywanie równań wielomianowych z parametrem zilustrujemy przykładami.

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru p, dla których jedno z rozwiązań równania

$$3x^3+(p-2)x^2-4x=0$$

jest średnią arytmetyczną pozostałych rozwiązań.

Lewą stronę równania możemy zapisać w postaci iloczynowej, wyłączając wspólny czynnik poza nawias. Otrzymujemy:

$$x\cdot[3x^2+(p-2)x-4]=0$$

Zatem

$$x=0 \quad \vee \quad 3x^2+(p-2)x-4=0$$

Jednym z rozwiązań równania

$$3x^3+(p-2)x^2-4x=0$$

jest liczba 0.
Rozważamy równanie

$$3x^2+(p-2)x-4=0$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta=(p-2)^2+48$$

Ponieważ $\Delta>0$ dla dowolnej wartości parametru p, więc równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania x_1, x_2.
Ze wzorów Viète'a wiemy, że rozwiązania x_1, x_2 mają różne znaki, bo

$$x_1\cdot x_2=-\frac{4}{3}, \quad -\frac{4}{3}<0$$

Zatem rozwiązanie równe 0 jest średnią arytmetyczną rozwiązań x_1 i x_2, czyli

$$\frac{x_1+x_2}{2}=0$$

Korzystając ponownie ze wzorów Viète'a, otrzymujemy:

$$x_1+x_2=-\frac{p-2}{3},$$

skąd

$$\frac{2-p}{6}=0,$$

czyli

$$p=2$$

Szukana wartość parametru p jest równa 2.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru p, dla których równanie $(x-2)\cdot\left[x^2-(p-2)x-p+1\right]=0$ ma dwa różne rozwiązania.

Równanie $(x-2)\left[x^2-(p-2)x-p+1\right]=0$
możemy przedstawić w postaci alternatywy dwóch równań:

$$\text{(I)}\quad x-2=0 \quad \vee \quad \text{(II)}\quad x^2-(p-2)x-p+1=0$$

Rozwiązaniem równania (I) jest liczba 2, która jest jednocześnie rozwiązaniem równania wyjściowego. Zatem równanie

$$(x-2)\cdot\left[x^2-(p-2)x-p+1\right]=0$$

ma dwa różne rozwiązania wtedy, gdy równanie

$$\text{(II)}\quad x^2-(p-2)x-p+1=0$$

ma jedno rozwiązanie różne od 2 lub dwa rozwiązania, z których jedno jest równe 2. Rozpatrzmy funkcję f, której wzór wyznaczony jest przez lewą stronę równania (II).

$$f(x)=x^2-(p-2)x-p+1$$

Z naszych rozważań wynika, że warunki zadania są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f ma jedno miejsce zerowe, przy czym odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest różna od 2, lub gdy funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe, z których jedno jest równe 2.
Stąd mamy:

$$\begin{cases}\Delta=0\\ x_w\neq 2\end{cases} \vee \begin{cases}\Delta>0\\ f(2)=0\end{cases}$$

Obliczamy:

- $\Delta=[-(p-2)]^2-4\cdot 1(-p+1)=p^2$
- $x_w=\dfrac{p-2}{2}$
- $f(2)=2^2-(p-2)\cdot 2-p+1=9-3p$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases}p^2=0\\ \dfrac{p-2}{2}\neq 2\end{cases} \vee \begin{cases}p^2>0\\ 9-3p=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p=0\\ p\in\mathbf{R}-\{6\}\end{cases} \vee \begin{cases}p\in\mathbf{R}-\{0\}\\ p=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p=0 \vee p=3)$$

Istnieją dwie wartości parametru p, dla których równanie ma dwa różne rozwiązania (0 oraz 3).

Przykład 3.

Wykażemy, że dla każdej wartości parametru m równanie

$$x^3-x^2+\left(m^2+2\right)x-m^2-2=0$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

Łatwo zauważyć, że rozwiązaniem równania jest liczba 1, bo

$$1^3-1^2+m^2+2-m^2-2=0$$

Na podstawie twierdzenia Bezouta wielomian

$$W(x)=x^3-x^2+\left(m^2+2\right)x-m^2-2$$

jest podzielny przez dwumian $(x-1)$.

W wyniku dzielenia otrzymamy wielomian $Q(x)=x^2+m^2+2$.
Zatem równanie $x^3-x^2+(m^2+2)x-m^2-2=0$ można zapisać w postaci:

$$\left(x-1\right)\left(x^2+m^2+2\right)=0$$

$$x-1=0 \quad \vee \quad x^2+m^2+2=0$$

$$x=1 \qquad \text{(równanie sprzeczne)}$$

Jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^4+5mx^2+4m^2+3m=0$$

ma trzy różne rozwiązania.

Równanie

$$(*) \qquad x^4+5mx^2+4m^2+3m=0$$

sprowadzamy do równania kwadratowego przez podstawienie $x^2=t$ i otrzymujemy równanie:

$$(**) \qquad t^2+5mt+4m^2+3m=0$$

Równanie (*) ma trzy rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (**) ma dwa rozwiązania, z których jedno jest dodatnie, a drugie równe zeru. Warunki zadania są spełnione, gdy:

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1 \cdot t_2=0 \end{cases}$$

Obliczamy:

- $\Delta=(5m)^2-4\left(4m^2+3m\right)=25m^2-16m^2-12m=9m^2-12m=3m(3m-4)$
- $t_1+t_2=-5m$
- $t_1 \cdot t_2=4m^2+3m=m(4m+3)$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} 3m(3m-4)>0 \\ -5m>0 \\ m(4m+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty,0)\cup\left(1\frac{1}{3},+\infty\right) \\ m\in(-\infty,0) \\ m=0 \vee m=-0{,}75 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m=-0{,}75$$

Równanie ma trzy różne rozwiązania wtedy, gdy $m=-0{,}75$.

Przykład 5.

Wykażemy, że jeśli równanie $x^3 + 0{,}5(p+1)x - 9 = 0$ ma trzy różne rozwiązania, to $p < -1$.

Założenie: równanie $x^3 + 0{,}5(p+1)x - 9 = 0$ ma trzy różne rozwiązania x_1, x_2, x_3

Teza: $p < -1$

Dowód: Skorzystamy ze wzorów Viète'a dla równania stopnia trzeciego. Rozwiązania x_1, x_2, x_3 równania $x^3 + 0{,}5(p+1)x - 9 = 0$ spełniają warunek:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0{,}5(p+1) \\ x_1x_2x_3 = 9 \end{cases}$$

Skoro $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, to $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$, czyli

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 = 0$, zatem

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 0$, ale $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0{,}5(p+1)$,

więc po podstawieniu wartości wyrażenia $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ do powyższej równości mamy:

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2 \cdot 0{,}5(p+1) = 0$

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = -p - 1$

Każde z rozwiązań równania $x^3 + 0{,}5(p+1)x - 9 = 0$ jest różne od zera (iloczyn rozwiązań wynosi 9), więc wyrażenie $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$ jest dodatnie. Zatem $-p - 1 > 0$, skąd $p < -1$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $(x+1) \cdot (x^2 + kx + 3) = 0$ ma dwa różne rozwiązania.
2. Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m równanie $(x^2 + 9) \cdot [2x^2 + (m+3)x - 2] = 0$ ma dwa różne rozwiązania.
3. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, tak aby równanie $3x^3 + 2(p-2)x^2 - 2px + 1 = 0$ miało trzy różne rozwiązania.
4. Wyznacz wszystkie wartości parametru k tak, aby równanie $x^3 + kx^2 + 4x = 0$ miało trzy rozwiązania nieujemne.
5. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^4 - (m+1)x^2 + 1 = 0$ ma cztery różne rozwiązania.
6. Wyznacz wszystkie wartości parametru p tak, aby równanie $(x^3 + 5x - 6) \cdot (x^2 - p) = 0$ miało trzy różne rozwiązania.
7. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których jedno z rozwiązań równania $4x^3 + 3px^2 = x(x+1)$ jest średnią arytmetyczną pozostałych rozwiązań.

Funkcje wielomianowe

Definicja 1.
Funkcję określoną wzorem $y = W(x)$, gdzie $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ jest wielomianem jednej zmiennej rzeczywistej x, nazywamy **funkcją wielomianową** zmiennej x.
Dziedziną funkcji wielomianowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

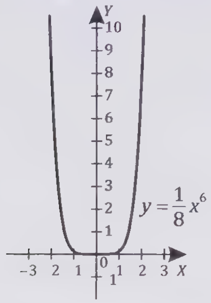
Przykładami funkcji wielomianowych są:

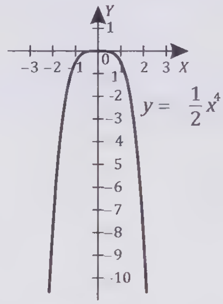
$y=3 \quad y=-x+5 \quad y=x^2+x-4 \quad y=-5x^3+6x+1 \quad y=x^7+9 \quad y=-x^{14}+6x^5+7x-9$

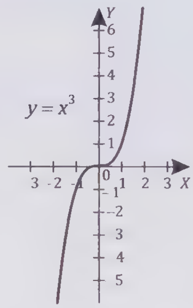
Wykresem funkcji liniowej jest prosta, zaś wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Omówimy teraz niektóre własności funkcji $y = W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia większego od 2 (funkcjami wielomianowymi zajmiemy się dokładniej w klasie III).
Przyjrzyjmy się bliżej wykresom funkcji wielomianowych typu

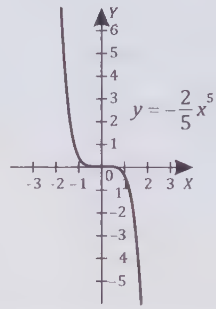
$y = ax^n$, gdzie $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$ i $n > 2$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Poniższe rysunki przedstawiają wykresy takich funkcji.





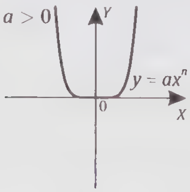


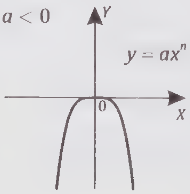


Nietrudno wykazać, że funkcja typu $y = ax^n$, gdzie $a \neq 0$, ma jedno miejsce zerowe – jest to liczba 0. Ponadto, jeśli n jest liczbą parzystą, to funkcja ta jest funkcją parzystą i jej wykres jest symetryczny względem osi OY; a jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja ta jest funkcją nieparzystą i jej wykres jest symetryczny względem punktu $O(0, 0)$ (spróbuj udowodnić powyższe własności).

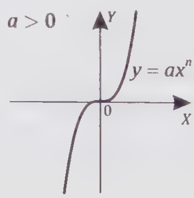
Ogólnie

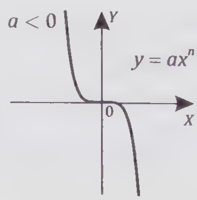
Jeśli n jest liczbą parzystą i $n > 2$, to wykres funkcji wielomianowej $y = ax^n$, gdzie $a \neq 0$, ma postać:



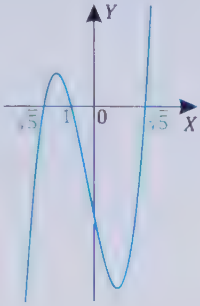
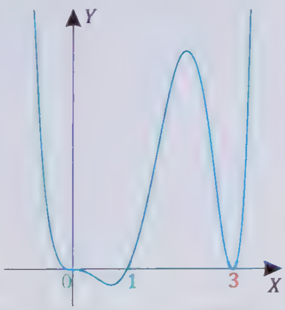
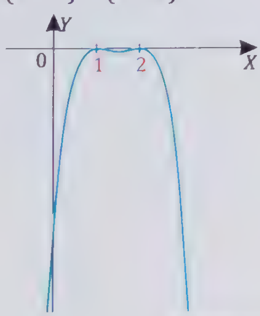


Jeśli n jest liczbą nieparzystą i $n > 2$, to wykres funkcji wielomianowej $y = ax^n$, gdzie $a \neq 0$, ma postać:



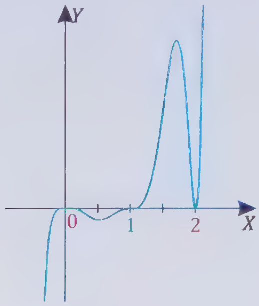


Przyjrzyjmy się teraz (uzyskanym za pomocą komputera) wykresom innych funkcji wielomianowych. Szczególnie będą interesowały nas te, które mają więcej niż jedno miejsce zerowe. Zwrócimy uwagę na związek wykresu funkcji $y = W(x)$ z krotnością pierwiastków wielomianu $W(x)$ oraz wartością współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x.

1) $y = x^3 + x^2 - 5x - 5$, czyli $y = (x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ 	Funkcja $y = W(x)$ ma trzy miejsca zerowe: $-\sqrt{5}, -1, \sqrt{5}$. Liczby $-\sqrt{5}, -1, \sqrt{5}$ są jednokrotnymi pierwiastkami wielomianu $W(x) = (x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni ($a_3 = 1$).
2) $y = 0{,}5x^6 - 3{,}5x^5 + 7{,}5x^4 - 4{,}5x^3$, czyli $y = 0{,}5x^3(x-1)(3-x)^2$ 	Funkcja $y = W(x)$ ma trzy miejsca zerowe: 0, 1 oraz 3. Liczby 0, 1, 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 0{,}5x^3(x-1)(3-x)^2$, przy czym: 0 – pierwiastek trzykrotny 1 – pierwiastek jednokrotny 3 – pierwiastek dwukrotny Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni ($a_6 = 0{,}5$).
3) $y = -x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 12x - 4$, czyli $y = -(x-2)^2 \cdot (1-x)^2$ 	Funkcja $y = W(x)$ ma dwa miejsca zerowe: 1 oraz 2. Liczby 1 oraz 2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -(x-2)^2 \cdot (1-x)^2$, przy czym: 1 – pierwiastek dwukrotny 2 – pierwiastek dwukrotny Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny ($a_4 = -1$).

<table>
<tr>
<td>

4) $y = 10x^9 - 70x^8 + 190x^7 - 250x^6 +$
$+ 160x^5 - 40x^4$, czyli
$y = 10x^4(x-2)^2 \cdot (x-1)^3$

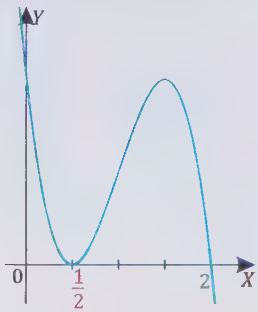


</td>
<td>

Funkcja $y = W(x)$ ma trzy miejsca zerowe: 0, 1 oraz 2.
Liczby 0, 1, 2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 10x^4(x-2)^2 \cdot (x-1)^3$, przy czym:
0 – pierwiastek czterokrotny
1 – pierwiastek trzykrotny
2 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni ($a_9 = 10$).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

5) $y = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 2$, czyli
$y = -4(x-0{,}5)^2 \cdot (x-2)$

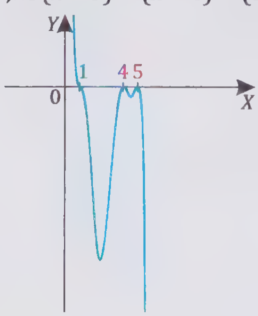


</td>
<td>

Funkcja $y = W(x)$ ma dwa miejsca zerowe: 0,5 oraz 2.
Liczby 0,5 oraz 2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -4(x-0{,}5)^2 \cdot (x-2)$, przy czym:
0,5 – pierwiastek dwukrotny
2 – pierwiastek jednokrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny ($a_3 = -4$).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

6) $y = 0{,}25(x-5)^2 \cdot (x-4)^2 \cdot (1-x)^3$

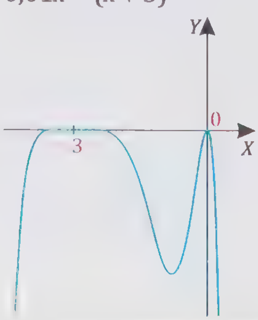


</td>
<td>

Funkcja $y = W(x)$ ma trzy miejsca zerowe: 1, 4 oraz 5.
Liczby 1, 4, 5 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 0{,}25(x-5)^2 \cdot (x-4)^2 \cdot (1-x)^3$, przy czym:
1 – pierwiastek trzykrotny
4 – pierwiastek dwukrotny
5 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny ($a_7 = -0{,}25$).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

7) $y = -0{,}01x^2 \cdot (x+3)^6$



</td>
<td>

Funkcja $y = W(x)$ ma dwa miejsca zerowe: –3 oraz 0.
Liczby –3 i 0 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = -0{,}01x^2 \cdot (x+3)^6$, przy czym:
–3 – pierwiastek sześciokrotny
0 – pierwiastek dwukrotny
Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest ujemny ($a_8 = -0{,}01$).

</td>
</tr>
</table>

Czy po analizie tych kilku przykładów mógłbyś naszkicować wykres funkcji wielomianowej? Wykres funkcji wielomianowej ma kształt „wężyka", który możemy naszkicować na kartce bez odrywania ołówka. Wykres „spotyka się z osią OX" tylko w tych jej punktach, które są pierwiastkami wielomianu. Jeśli pierwiastek ma krotność nieparzystą, to wykres „przechodzi" na drugą stronę osi OX; ale jeśli napotka pierwiastek o parzystej krotności, to „odbija się" od osi OX. Istotna jest też informacja, jak rozpocząć szkicowanie wykresu. Na pewno zauważyłeś, że gdybyśmy rozpoczęli szkicowanie z prawej strony kartki, wówczas linię kreślilibyśmy od góry wtedy, gdy współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej wielomianu jest dodatni, a od dołu wtedy, gdy współczynnik ten jest ujemny.

Przykład 1.

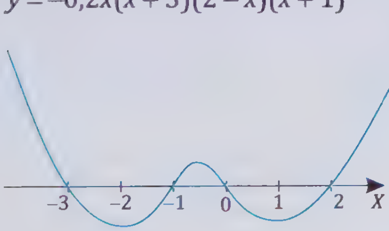
Kierując się powyższymi spostrzeżeniami, naszkicujemy wykresy funkcji wielomianowych:

a) $y=-0{,}2x(x+3)(2-x)(x+1)$ b) $y=-(x+2)^2(x-1)$,

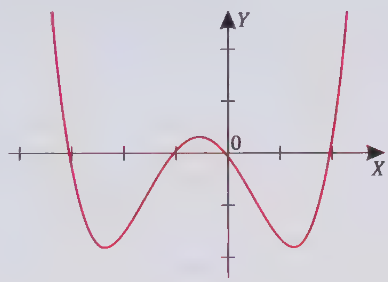
a następnie porównamy otrzymane wykresy z wykresami sporządzonymi przez komputer.

Ad a) Wielomian $W(x)=-0{,}2x(x+3)(2-x)(x+1)$ ma cztery pierwiastki jednokrotne: -3, -1, 0 oraz 2. Współczynnik a_4, przy najwyższej potędze zmiennej, jest dodatni, ponieważ $a_4=-0{,}2\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1=0{,}2$.

Otrzymujemy szkic wykresu funkcji $y=-0{,}2x(x+3)(2-x)(x+1)$

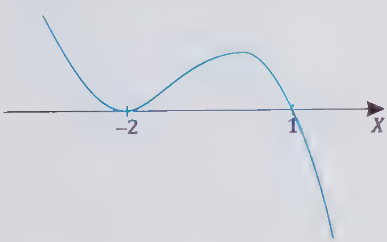


Wydruk komputerowy

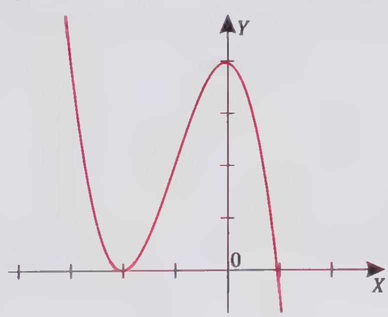


Ad b) Wielomian $W(x)=-(x+2)^2(x-1)$ ma dwa pierwiastki: -2 (dwukrotny) oraz 1 (jednokrotny). Współczynnik a_3, przy najwyższej potędze zmiennej, jest ujemny, ponieważ $a_3=-1\cdot 1\cdot 1=-1$.

Otrzymujemy szkic wykresu funkcji $y=-(x+2)^2\cdot(x-1)$



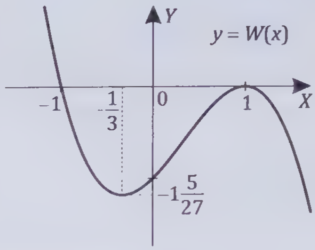
Wydruk komputerowy



Zauważ, że szkic wykresu funkcji wielomianowej jest wystarczający, aby określić, dla jakich argumentów funkcja wielomianowa przyjmuje wartości dodatnie (niedodatnie), a dla jakich ujemne (nieujemne). Ten fakt wykorzystamy w rozwiązywaniu nierówności wielomianowych, które omówimy w następnym temacie.

Przykład 2.

Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st.$W(x) = 3$. Do wykresu funkcji należą punkty $A(-1, 0)$, $B\left(-\frac{1}{3}, -1\frac{5}{27}\right)$ oraz $C(1, 0)$.



a) Odczytamy z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne.
b) Ustalimy wzór funkcji $y = W(x)$.

Ad a) Funkcja $y = W(x)$ przyjmuje wartości ujemne wtedy, gdy $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ad b) Z wykresu możemy odczytać, że współczynnik wielomianu $W(x)$ przy x^3 jest liczbą ujemną (st.$W(x) = 3$) oraz wielomian $W(x)$ ma dwa pierwiastki: -1 (pierwiastek jednokrotny), a także 1 (pierwiastek dwukrotny). Stąd wzór funkcji jest następujący:

$y = a(x+1)(x-1)^2$, gdzie $a < 0$.

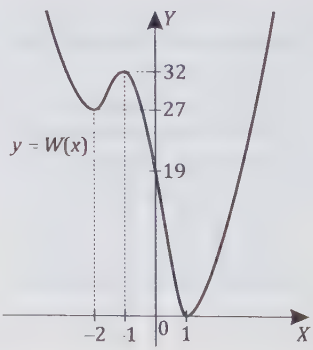
Współczynnik a obliczymy, korzystając z informacji, że do wykresu funkcji należy punkt $B\left(-\frac{1}{3}, -1\frac{5}{27}\right)$. Mamy:

$$-\frac{32}{27} = a \cdot \left(-\frac{1}{3}+1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}-1\right)^2, \text{ więc } -\frac{32}{27} = a \cdot \frac{32}{27}, \text{ czyli } a = -1.$$

Zatem $y = -(x+1)(x-1)^2$, czyli $y = -x^3 + x^2 + x - 1$.
Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji $y = -x^3 + x^2 + x - 1$. Funkcja przyjmuje wartości ujemne wtedy, gdy $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Przykład 3.

Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st.$W(x) = 4$. Do wykresu funkcji należą punkty $A(-2, 27)$, $B(-1, 32)$, $C(0, 19)$.
Miejscem zerowym funkcji jest liczba 1.
Ustalimy wzór tej funkcji.



Na podstawie wykresu funkcji możemy stwierdzić, że współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej (x^4) jest liczbą dodatnią ($a_4 > 0$) oraz liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ o krotności parzystej. Ponieważ st.$W(x) = 4$ wnioskujemy, że 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym lub czterokrotnym. Na podstawie „kształtu" wykresu stwierdzamy, że 1 nie jest czterokrotnym pierwiastkiem wielomianu. W przeciwnym razie wzór funkcja wielomianowa miałby postać

$y = a(x-1)^4,\ a > 0,$

a jej wykres powstałby przez przesunięcie równoległe wykresu funkcji

$y = ax^4$ o wektor $\vec{u} = [1, 0]$

i byłby symetryczny względem prostej o równaniu $x = 1$.

Zatem liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, czyli

$W(x) = (x-1)^2 \cdot Q(x)$, gdzie

$Q(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$

Stąd wzór funkcji wielomianowej ma postać

$y = (x-1)^2 \cdot (ax^2 + bx + c)$, gdzie $a > 0$.

Punkty $A(-2, 27)$, $B(-1, 32)$ oraz $C(0, 19)$ należą do wykresu funkcji, więc:

$$\begin{cases} 27 = 9 \cdot (4a - 2b + c) & /:9 \\ 32 = 4 \cdot (a - b + c) & /:4 \\ 19 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ a - b + c = 8 \\ c = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -8 \\ a - b = -11 \\ c = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 14 \\ c = 19 \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$y = (x-1)^2 \cdot \left(3x^2 + 14x + 19\right) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\left(3x^2 + 14x + 19\right) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 19$$

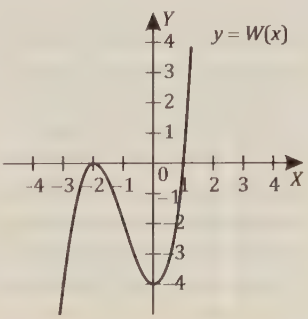
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wielomianowej określonej wzorem

$y = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 19$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykresy funkcji wielomianowych:
   a) $y = (x+3)(x-1)(2-x)$
   b) $y = -2(x+2)^2(x-5)(x+1)$
   c) $y = -3(x+2)^5(x^2-4)$
   d) $y = 3\left(x^2 + 4x + 4\right)\left(x^2 + 6x + 9\right)x$
   e) $y = (x+4)^4(x-1)^6$
   f) $y = -0{,}8 \cdot (x-1)^3(x-6)^7$

2. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st.$W(x) = 3$. Do wykresu funkcji należą punkty $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ oraz $C(0, -4)$.
   a) Ustal wzór funkcji $y = W(x)$.
   b) Wykres funkcji $y = W(x)$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji $y = W_1(x)$. Napisz wzór funkcji $y = W_1(x)$.



Nierówności wielomianowe

Definicja 1.
Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy nierówność, którą można przekształcić równoważnie do postaci:

$$W(x) \leqslant 0 \quad \text{lub} \quad W(x) < 0, \quad \text{lub} \quad W(x) \geqslant 0, \quad \text{lub} \quad W(x) > 0,$$

gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n ($n \in N$).

Rozwiązać nierówność $W(x) \geqslant 0$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich x wartość wielomianu $W(x)$ jest nieujemna?” albo „Dla jakich argumentów funkcja wielomianowa $y = W(x)$ przyjmuje wartości nieujemne?”.

Odpowiedz na pytanie: „Co to znaczy rozwiązać nierówność $W(x) \leqslant 0$, $W(x) < 0$, $W(x) > 0$?”.

Aby odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich x wartość wielomianu $W(x)$ jest nieujemna?”, wygodnie jest rozłożyć wielomian $W(x)$ na czynniki możliwie najniższego stopnia, określić znaki poszczególnych czynników rozkładu, a następnie ustalić znak iloczynu tych czynników. Do tego celu służy tzw. „siatka znaków”.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówność $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$ za pomocą „siatki znaków”.

Sprowadzamy nierówność wielomianową do postaci:

$$-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$$

Następnie rozkładamy wielomian

$$W(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

na czynniki, np. metodą grupowania wyrazów. W tym celu wyraz $-5x$ zapiszemy w postaci $-4x - x$. Mamy:

$$W(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = (-x^3 + 4x^2 - 4x) - x + 2 = -x(x^2 - 4x + 4) - 1 \cdot (x - 2) =$$
$$= -x \cdot (x - 2)^2 - 1 \cdot (x - 2) = -(x - 2)(x^2 - 2x + 1) = -(x - 2)(x - 1)^2$$

Nierówność $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$ jest równoważna nierówności

$$-(x - 2)(x - 1)^2 \geqslant 0$$

Teraz przystępujemy do utworzenia tabeli zwanej „siatką znaków”.
W pierwszej kolumnie od lewej strony wypisujemy kolejne czynniki wynikające z rozkładu wielomianu. W górnym wierszu zapisujemy przedziały liczbowe, które zostały wyznaczone na osi OX przez pierwiastki wielomianu: 1 oraz 2. W kolumnach pod przedziałami umieszczamy znaki przyjmowane w tych przedziałach przez poszczególne czynniki. Ostatni wiersz tabeli informuje nas o znakach wielomianu $W(x)$ w poszczególnych przedziałach.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$-(x-2)$	+		+	0	–
$(x-1)^2$	+	0	+		+
$W(x) = -(x-2)(x-1)^2$	+	0	+	0	–

Z tabeli odczytujemy, że

$W(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2\rangle$

Zbiorem rozwiązań nierówności $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$ jest przedział $(-\infty, 2\rangle$.

Rozwiązując nierówność kwadratową, posługiwałeś się wykresem funkcji kwadratowej. Nierówność wielomianową stopnia większego od 2 możemy rozwiązać podobnie.

Rozwiązać nierówność $W(x) \geqslant 0$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów funkcja wielomianowa $y = W(x)$ przyjmuje wartości nieujemne?".

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$, korzystając z wykresu funkcji wielomianowej.

Podobnie jak w przykładzie 1., przekształcamy nierówność równoważnie do postaci

$-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$,

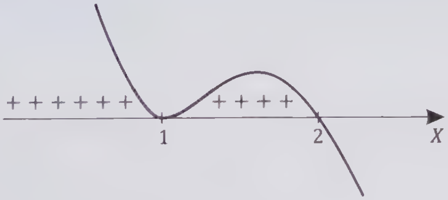
a następnie wielomian $W(x)$ występujący po lewej stronie nierówności zapisujemy w postaci iloczynowej

$W(x) = -(x-2)(x-1)^2$

Teraz wystarczy naszkicować wykres funkcji

$y = -(x-2)(x-1)^2$

Funkcja ma dwa miejsca zerowe 1 oraz 2 (liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$; liczba 2 jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$). Wykres szkicujemy od prawej strony od dołu, bo współczynnik przy x^3 jest ujemny ($a_3 = -1$). Otrzymujemy:



$-(x-2)(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2\rangle$

Zbiorem rozwiązań nierówności $-x^3 + 4x^2 \geqslant 5x - 2$ jest przedział $(-\infty, 2\rangle$.

Przykład 3.

Wykażemy, że nierówność $x^8+4x^6-2x^5-8x^3+x^2+4 \geqslant 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Rozłożymy wielomian

$$W(x)=x^8+4x^6-2x^5-8x^3+x^2+4$$

na czynniki. Mamy:

$$W(x)=x^8+4x^6-2x^5-8x^3+x^2+4=x^6(x^2+4)-2x^3(x^2+4)+1(x^2+4)=$$
$$=(x^2+4)(x^6-2x^3+1)=(x^2+4)(x^3-1)^2$$

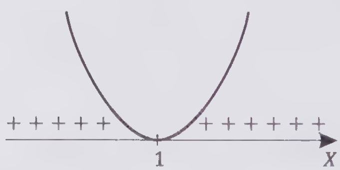
<u>I sposób</u> – ustalamy znak iloczynu na podstawie znaków czynników.

- $\bigwedge\limits_{x\in \mathbf{R}} x^2+4>0,$ bo suma liczby nieujemnej i dodatniej jest dodatnia
- $\bigwedge\limits_{x\in \mathbf{R}} (x^3-1)^2 \geqslant 0,$ bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną
- iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej jest liczbą nieujemną, więc dla dowolnej liczby $x\in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność $(x^2+4)(x^3-1)^2 \geqslant 0$.

<u>II sposób</u> – korzystamy ze szkicu wykresu funkcji wielomianowej $y=(x^2+4)(x^3-1)^2$. W tym celu przekształcimy wzór funkcji wielomianowej do postaci:

$$y=(x^2+4)\left[(x-1)(x^2+x+1)\right]^2=$$
$$=(x^2+4)(x^2+x+1)^2(x-1)^2$$

Funkcja ma tylko jedno miejsce zerowe: 1.
Liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu.
Poniższy rysunek przedstawia szkic wykresu funkcji $y=x^8+4x^6-2x^5-8x^3+x^2+4$.



Na podstawie wykresu wnioskujemy, że dla wszystkich argumentów rzeczywistych wartości funkcji są nieujemne, czyli

$$\bigwedge_{x\in \mathbf{R}} x^8+4x^6-2x^5-8x^3+x^2+4 \geqslant 0$$

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których nierówność $x^4+(m-2)x^2+m+1>0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Daną nierówność spełnia każda liczba rzeczywista, gdy wykres funkcji wielomianowej $y=x^4+(m-2)x^2+m+1$ znajduje się nad osią OX. Ponieważ współczynnik przy x^4 jest dodatni, więc warunki zadania są spełnione wtedy, gdy funkcja wielomiano-

wa nie ma miejsc zerowych, czyli równanie $x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0$ jest sprzeczne.
Sprowadzamy równanie

(*) $\quad x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0$

do równania kwadratowego przez podstawienie $x^2 = t$ i otrzymujemy równanie:

(**) $\quad t^2 + (m-2)t + m + 1 = 0$

Równanie (*) nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy:

I. równanie (**) nie ma rozwiązań lub

II. równanie (**) ma jedno rozwiązanie t_0, które jest liczbą ujemną lub

III. równanie (**) ma dwa rozwiązania t_1, t_2, które są liczbami ujemnymi.

Otrzymujemy następujące warunki:

$$\text{I. } \Delta < 0 \quad \text{lub} \quad \text{II. } \begin{cases} \Delta = 0 \\ t_0 < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \text{III. } \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 < 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases}$$

Obliczamy:

- $\Delta = (m-2)^2 - 4(m+1) = m^2 - 8m = m(m-8)$
- $t_0 = \dfrac{2-m}{2}$
- $t_1 + t_2 = 2 - m$
- $t_1 \cdot t_2 = m + 1$

Teraz kolejno rozwiązujemy warunki.

Ad I. $\quad \Delta < 0 \;\Leftrightarrow\; m(m-8) < 0 \;\Leftrightarrow\; m \in (0, 8)$

Ad II. $\quad \begin{cases} \Delta = 0 \\ t_0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-8) = 0 \\ \dfrac{2-m}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \{0, 8\} \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8$

Ad III. $\quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 < 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-8) > 0 \\ 2 - m < 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty) \\ m \in (2, +\infty) \\ m \in (-1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (8, +\infty)$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$[m \in (0, 8) \;\vee\; m = 8 \;\vee\; m \in (8, +\infty)] \;\Leftrightarrow\; m \in (0, +\infty).$$

Równanie $x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań wtedy, gdy $m \in (0, +\infty)$.

Zatem nierówność $x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą wtedy, gdy $m \in (0, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż nierówności:

   a) $(x^2 - 4)(x-2)^2(x+1)^2 \geqslant 0$ b) $(x-1)(2 - x + x^2) < 0$

   c) $-x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 20x + 12 < 0$ d) $-2x^3 - 3x^2 > 8 - 18x$

2. Wykaż, że nierówność $x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 3x + 9 > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

6. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych

Definicja 1.
Ułamkiem algebraicznym jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie $\frac{W(x)}{P(x)}$, którego licznikiem jest wielomian $W(x)$, a mianownikiem wielomian $P(x)$ i $P(x) \neq 0$.

Dziedziną ułamka algebraicznego $\frac{W(x)}{P(x)}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wielomian $P(x)$ nie przyjmuje wartości zero, czyli $D = \mathbf{R} - \{x\colon P(x) = 0\}$.

Przykładami ułamków algebraicznych są wyrażenia:

$\frac{4}{x}$, gdzie $D = \mathbf{R} - \{0\}$

$\frac{2x-5}{x^3+8}$, gdzie $D = \mathbf{R} - \{-2\}$

$\frac{x^3+5x-6}{(x+5)(x-1)x}$, gdzie $D = \mathbf{R} - \{-5, 0, 1\}$.

Podobnie jak w przypadku liczb wymiernych, na ułamkach algebraicznych można wykonywać działania arytmetyczne. Można je również skracać i rozszerzać. W tym temacie omówimy skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych.

Skracanie ułamków algebraicznych

Aby skrócić ułamek algebraiczny:
1) przedstawiamy wielomiany, występujące w liczniku i mianowniku ułamka, w postaci iloczynowej (o ile to możliwe); czynniki iloczynu powinny być możliwie najniższego stopnia;
2) określamy dziedzinę ułamka;
3) dzielimy licznik i mianownik ułamka przez ich wspólne czynniki (skreślamy jednakowe czynniki).

Przykład 1.

Skrócimy ułamek algebraiczny $\frac{3x^3+6x^2}{x^4-4x^2}$.

$\frac{3x^3+6x^2}{x^4-4x^2}=$

- rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku ułamka na czynniki:

  $3x^3+6x^2=3x^2(x+2)$

  $x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x-2)(x+2)$

$=\frac{3x^2(x+2)}{x^2(x-2)(x+2)}=$

- zakładamy, że każdy czynnik mianownika jest różny od zera:

  $x\neq 0, x\neq 2, x\neq -2$, czyli $D=\boldsymbol{R}-\{-2, 0, 2\}$

$=\frac{3\cancel{x^2}^{1}\cancel{(x+2)}^{1}}{{}^{1}\cancel{x^2}(x-2)\cancel{(x+2)}_{1}}=$

- dzielimy licznik i mianownik przez ich wspólne czynniki;

  $x^2,\ x+2$

  (skreślamy jednakowe dla licznika i mianownika czynniki)

$=\frac{3}{x-2}$

Ułamek $\frac{3x^3+6x^2}{x^4-4x^2}$ po skróceniu ma postać $\frac{3}{x-2}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-2, 0, 2\}$.

Przykład 2.

Skrócimy ułamek algebraiczny $\frac{2x^3-x^2-7x+6}{x^3+2x^2-x-2}$.

- Rozkładamy wielomiany

  $W(x)=2x^3-x^2-7x+6$ oraz $P(x)=x^3+2x^2-x-2$

na czynniki.
Wykorzystując twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych, ustalamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=2x^3-x^2-7x+6$ $(W(1)=0)$. Wielomian $W(x)$ jest więc podzielny przez dwumian $(x-1)$, na mocy tw. Bezouta. Wykonujemy dzielenie.

	2	–1	–7	6
1		2	1	–6
	2	1	–6	0

Zatem $W(x)=(x-1)(2x^2+x-6)$.

Trójmian kwadratowy $2x^2+x-6$ zapisujemy w postaci iloczynowej

$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ (sprawdź!). Stąd

$W(x)=(x-1)(x+2)(2x-3)$

Wielomian $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów.

$P(x)=x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1)$

- Ułamek przedstawiamy w postaci

$$\frac{2x^3-x^2-7x+6}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{(x-1)(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$

Określamy dziedzinę ułamka. Każdy czynnik mianownika jest różny od zera:

$x+2\neq 0,\quad x-1\neq 0,\quad x+1\neq 0$, stąd

$D=\boldsymbol{R}-\{-2,-1,1\}$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez ich wspólne czynniki.

$$\frac{2x^3-x^2-7x+6}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{{}^{1}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)}^{1}(2x-3)}{{}^{1}\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}_{1}(x+1)}=\frac{2x-3}{x+1}$$

Po skróceniu ułamek ma postać $\frac{2x-3}{x+1}$, gdzie $D=\boldsymbol{R}-\{-2,-1,1\}$.

Rozszerzanie ułamków algebraicznych

Aby rozszerzyć ułamek algebraiczny:
1) określamy dziedzinę ułamka;
2) mnożymy licznik i mianownik ułamka przez niezerowy wielomian i zakładamy, że wielomian ten nie przyjmuje wartości równej zero;
3) wykonujemy mnożenie wielomianów w liczniku i mianowniku ułamka.

Przykład 3.

a) Rozszerzymy ułamek $\frac{x-3}{x^2}$ tak, aby jego licznik był równy $(x-3)(x+1)$.

b) Rozszerzymy ułamek $\frac{7}{x+2}$ tak, aby jego mianownik był równy x^3-4x.

Ad a) Dziedziną ułamka $\frac{x-3}{x^2}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{0\}$.

Aby otrzymać ułamek o liczniku $(x-3)(x+1)$, należy licznik i mianownik ułamka $\frac{x-3}{x^2}$ pomnożyć przez wielomian $(x+1)$, przy założeniu, że $x\neq -1$. Otrzymujemy:

$$\frac{x-3}{x^2}=\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x+1)}=\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2}$$

Ułamek $\frac{x-3}{x^2}$ po rozszerzeniu ma postać $\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2}$, gdzie $D=\boldsymbol{R}-\{-1,0\}$.

Ad b) Dziedziną ułamka $\frac{7}{x+2}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{-2\}$.

Rozłóżmy wielomian $W(x)=x^3-4x$ na czynniki:

$W(x)=x(x-2)(x+2)$

Zauważ, że wśród czynników wielomianu $W(x)$, oprócz czynnika $(x+2)$, występuje czynnik

$x(x-2)$, czyli x^2-2x.

Zatem licznik i mianownik ułamka

$$\frac{7}{x+2}$$

należy pomnożyć przez

(x^2-2x)

przy założeniu, że

$x \neq 0$ i $x \neq 2$.

Mamy więc:

$$\frac{7}{x+2}=\frac{7(x^2-2x)}{(x+2)(x^2-2x)}=\frac{7x^2-14x}{x^3-4x}$$

Ułamek $\frac{7}{x+2}$ po rozszerzeniu ma postać $\frac{7x^2-14x}{x^3-4x}$, gdzie $D=\mathbf{R}-\{-2, 0, 2\}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Skróć następujące ułamki algebraiczne. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2x^2}{16x^7}$ b) $\frac{(x-1)^3}{(1-x)^4}$ c) $\frac{(x-5)^2}{x^2-5^2}$

d) $\frac{x^2-81}{x^2-18x+81}$ e) $\frac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}$ f) $\frac{x(x^2+2x+1)}{x^3+x^2+5x+5}$

2. Skróć następujące ułamki algebraiczne. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2x^3+5x^2-4x-3}{x^3+3x^2-x-3}$ b) $\frac{x^3-3x^3-9x-5}{x^3-2x^2+x}$

c) $\frac{x^4-13x^2+36}{x^3+x^2-6x}$ d) $\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-4x+4}$

3. Rozszerz ułamki algebraiczne tak, aby miały wskazany licznik (mianownik). Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2}{x}=\frac{}{3x^3}$ b) $\frac{4x+1}{3x}=\frac{16x^2-1}{}$

c) $\frac{3+x}{3-x}=\frac{}{x^2-9}$ d) $\frac{x}{x-1}=\frac{x^3-5x}{}$

e) $\frac{x}{x+6}=\frac{}{x(x^2+5x-6)}$ f) $\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{x^3-2x^2+3x-6}{}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych wykonujemy podobnie jak dodawanie i odejmowanie ułamków arytmetycznych.

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych o jednakowych mianownikach

W wyniku dodawania dwóch ułamków algebraicznych o tym samym mianowniku otrzymujemy ułamek algebraiczny, którego licznik jest sumą wielomianów występujących w licznikach tych ułamków, a mianownik jest wielomianem występującym w mianowniku każdego ze składników.

Dziedziną otrzymanego ułamka algebraicznego jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wielomian występujący w mianowniku każdego z ułamków nie przyjmuje wartości równej zeru.

Podobnie, w wyniku odejmowania dwóch ułamków algebraicznych o tym samym mianowniku otrzymujemy ułamek algebraiczny, którego licznik jest różnicą wielomianu występującego w liczniku pierwszego ułamka i wielomianu występującego w liczniku drugiego ułamka, a mianownik jest wielomianem występującym w mianowniku każdego z ułamków. Dziedzinę wyrażenia wyznaczamy tak samo, jak w przypadku dodawania.

Przykład 1

Wykonamy dodawanie ułamków:

a) $\frac{4}{x+6}+\frac{x-5}{x+6}$ b) $\frac{3x-1}{2x^3-8x}+\frac{2-7x}{2x^3-8x}$

Ad a) Każdy ułamek jest określony wtedy, gdy $x \neq -6$, więc $D=\mathbf{R}-\{-6\}$. Otrzymujemy:

$$\frac{4}{x+6}+\frac{x-5}{x+6}=\frac{4+x-5}{x+6}=\frac{x-1}{x+6}$$

W wyniku dodawania ułamków $\frac{4}{x+6}+\frac{x-5}{x+6}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{x-1}{x+6}$, gdzie $D=\mathbf{R}-\{-6\}$.

Ad b) Najpierw należy określić dziedzinę każdego z ułamków. W tym celu rozkładamy wielomian występujący w mianowniku ułamków na czynniki.

$$2x^3-8x=2x(x-2)(x+2)$$

Teraz zakładamy, że każdy czynnik wielomianu, który nie jest stałą, jest różny od zera. Otrzymujemy:

$x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2$, więc

$D=\mathbf{R}-\{-2, 0, 2\}$

Przystępujemy do dodawania ułamków.

$$\frac{3x-1}{2x^3-8x}+\frac{2-7x}{2x^3-8x}=\frac{3x-1+2-7x}{2x^3-8x}=\frac{-4x+1}{2x^3-8x}$$

W wyniku dodawania ułamków $\frac{3x-1}{2x^3-8x}+\frac{2-7x}{2x^3-8x}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{-4x+1}{2x^3-8x}$, gdzie $D=\boldsymbol{R}-\{-2, 0, 2\}$.

Przykład 2.

Wykonamy odejmowanie ułamków: $\frac{2x-3}{x^2-9x}-\frac{5x-8}{x^2-9x}$.

Najpierw określimy dziedzinę każdego z ułamków. W tym celu rozkładamy wielomian występujący w mianowniku ułamków na czynniki.

$x^2-9x=x(x-9)$

Zakładamy, że każdy czynnik wielomianu jest różny od zera, czyli:

$x\neq 0, x\neq 9$, więc

$D=\boldsymbol{R}-\{0, 9\}$

Teraz możemy przystąpić do odejmowania ułamków.

$$\frac{2x-3}{x^2-9x}-\frac{5x-8}{x^2-9x}=\frac{2x-3-(5x-8)}{x^2-9x}=\frac{2x-3-5x+8}{x^2-9x}=\frac{-3x+5}{x^2-9x}$$

W wyniku odejmowania ułamków $\frac{2x-3}{x^2-9x}-\frac{5x-8}{x^2-9x}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{-3x+5}{x^2-9x}$, gdzie $D=\boldsymbol{R}-\{0, 9\}$.

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych o różnych mianownikach

Dodawanie (odejmowanie) dwóch ułamków algebraicznych o różnych mianownikach polega na sprowadzeniu tych ułamków do wspólnego mianownika, a następnie dodaniu (odjęciu) ułamków o jednakowych mianownikach.

Aby dodać (odjąć) dwa ułamki algebraiczne o różnych mianownikach:
1) rozkładamy (o ile to możliwe) wielomiany występujące w mianownikach ułamków na czynniki możliwie najniższego stopnia, a następnie określamy dziedzinę każdego z ułamków. Dziedziną ułamka algebraicznego, który jest sumą (różnicą) danych ułamków, jest część wspólna dziedzin ułamków, które dodajemy (odejmujemy);
2) ustalamy wspólny mianownik ułamków; wspólny mianownik tych ułamków jest iloczynem wszystkich czynników mianownika jednego ułamka i tych czynników mianownika drugiego ułamka, których nie ma w pierwszym;
3) rozszerzamy ułamki do ich wspólnego mianownika;
4) dodajemy (odejmujemy) ułamki o wspólnym mianowniku.

Przykład 3

Wykonamy dodawanie:

a) $\frac{1}{x}+\frac{2+x}{x-1}$ b) $5+\frac{x^2}{2x-3}$ c) $\frac{x+3}{x^2-2x}+\frac{4}{x-2}$

Ad a) Ustalamy dziedzinę: pierwszy ułamek jest określony wtedy, gdy $x \neq 0$; drugi ułamek – wtedy, gdy $x \neq 1$; zatem

$D = \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$

Teraz sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika. Wspólnym mianownikiem tych ułamków jest iloczyn ich mianowników, czyli wielomian

$x(x-1)$

Rozszerzamy każdy z ułamków do ich wspólnego mianownika: licznik i mianownik pierwszego ułamka mnożymy przez $(x-1)$, a licznik i mianownik drugiego ułamka mnożymy przez x. Następnie dodajemy ułamki o tych samych mianownikach. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{x}+\frac{2+x}{x-1}=\frac{x-1}{x(x-1)}+\frac{x(2+x)}{x(x-1)}=\frac{x-1+2x+x^2}{x(x-1)}=\frac{x^2+3x-1}{x(x-1)}$$

W wyniku dodawania ułamków $\frac{1}{x}+\frac{2+x}{x-1}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{x^2+3x-1}{x(x-1)}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$.

Ad b) Ustalamy dziedzinę ułamka $5+\frac{x^2}{2x-3}$. Mamy: $x \neq 1\frac{1}{2}$, więc

$D = \boldsymbol{R} - \left\{1\frac{1}{2}\right\}$

Zauważamy, że liczbę 5 możemy zapisać w postaci ułamka algebraicznego

$\frac{5(2x-3)}{2x-3}$, przy założeniu, że $x \neq 1\frac{1}{2}$.

Teraz dodajemy ułamki o jednakowych mianownikach.

$$5+\frac{x^2}{2x-3}=\frac{5(2x-3)}{2x-3}+\frac{x^2}{2x-3}=\frac{x^2+10x-15}{2x-3}$$

W wyniku dodawania $5+\frac{x^2}{2x-3}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{x^2+10x-15}{2x-3}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \left\{1\frac{1}{2}\right\}$.

Ad c) Rozkładamy na czynniki mianownik pierwszego ułamka sumy $\frac{x+3}{x^2-2x}+\frac{4}{x-2}$. Mamy:

$x^2-2x = x(x-2)$

Określamy dziedzinę: pierwszy ułamek jest określony wtedy, gdy $x \neq 0$ i $x \neq 2$, a drugi – wtedy, gdy $x \neq 2$. Zatem dodawanie jest określone wtedy, gdy

$x \neq 0$ i $x \neq 2$, czyli

$D = \boldsymbol{R} - \{0, 2\}$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika. W rozkładzie na czynniki mianownika pierwszego ułamka występują czynniki

$(x-2)$ oraz x,

a w mianowniku drugiego ułamka występuje tylko wyrażenie

$(x-2)$

Zatem, aby otrzymać wspólny mianownik

$x(x-2)$,

należy drugi ułamek rozszerzyć, mnożąc jego licznik i mianownik przez x. Otrzymujemy:

$$\frac{x+3}{x^2-2x}+\frac{4}{x-2}=\frac{x+3}{x(x-2)}+\frac{4x}{(x-2)x}=\frac{x+3+4x}{x(x-2)}=\frac{5x+3}{x^2-2x}$$

W wyniku dodawania ułamków $\frac{x+3}{x^2-2x}+\frac{4}{x-2}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{5x+3}{x^2-2x}$, gdzie $D=\boldsymbol{R}-\{0,2\}$.

Przykład 4.

Wykonamy odejmowanie ułamków:

a) $\frac{x+4}{x-5}-\frac{3x-3}{5-x}$

b) $\frac{4}{x^2-2x}-\frac{1}{3x^2-12}$

c) $\frac{x}{x^3-5x^2-8x+12}-\frac{1}{x^3-7x^2+6x}$

Ad a) Chcemy wykonać odejmowanie $\frac{x+4}{x-5}-\frac{3x-3}{5-x}$. Każdy z ułamków jest określony, jeśli $x \neq 5$, więc

$D=\boldsymbol{R}-\{5\}$

Zauważ, że mianownik drugiego ułamka możemy zapisać w postaci:

$-(x-5)$

Zatem różnicę ułamków możemy zapisać w postaci sumy ułamków o jednakowych mianownikach.

$$\frac{x+4}{x-5}-\frac{3x-3}{5-x}=\frac{x+4}{x-5}-\frac{3x-3}{-(x-5)}=\frac{x+4}{x-5}+\frac{3x-3}{x-5}$$

Obliczamy:

$$\frac{x+4}{x-5}-\frac{3x-3}{5-x}=\frac{x+4}{x-5}+\frac{3x-3}{x-5}=\frac{4x+1}{x-5}$$

W wyniku odejmowania ułamków $\frac{x+4}{x-5}-\frac{3x-3}{5-x}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{4x+1}{x-5}$, gdzie $D=\boldsymbol{R}-\{5\}$.

Ad b) Wykonamy odejmowanie $\frac{4}{x^2-2x}-\frac{1}{3x^2-12}$.

$$\frac{4}{x^2-2x}-\frac{1}{3x^2-12}=$$

- rozkładamy wielomiany w mianownikach ułamków na czynniki:
  $x^2-2x=x(x-2)$
  $3x^2-12=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2)$

$$=\frac{4}{x(x-2)}-\frac{1}{3(x-2)(x+2)}=$$

- ustalamy dziedzinę: $x\neq 0$, $x\neq 2$, $x\neq -2$, więc
  $D=\boldsymbol{R}-\{-2,0,2\}$

$$=\frac{4\cdot 3\cdot(x+2)}{3x(x-2)(x+2)}-\frac{1\cdot x}{3x(x-2)(x+2)}=$$

- znajdujemy wspólny mianownik:
  $3x(x-2)(x+2)$

$$=\frac{12x+24}{3x(x-2)(x+2)}-\frac{x}{3x(x-2)(x+2)}=$$

- rozszerzamy ułamki do wspólnego mianownika: pierwszy rozszerzamy przez $3(x+2)$, drugi rozszerzamy przez x

$$=\frac{11x+24}{3x(x-2)(x+2)}$$

- odejmujemy ułamki o wspólnym mianowniku

W wyniku odejmowania ułamków $\frac{4}{x^2-2x}-\frac{1}{3x^2-12}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{11x+24}{3x(x-2)(x+2)}$, gdzie $D=\boldsymbol{R}-\{-2,0,2\}$.

Ad c) Wykonamy odejmowanie $\frac{x}{x^3-5x^2-8x+12}-\frac{1}{x^3-7x^2+6x}$.

- Rozkładamy wielomiany

$W(x)=x^3-5x^2-8x+12$ oraz $F(x)=x^3-7x^2+6x$,

występujące w mianownikach ułamków, na czynniki.
Wielomian $W(x)=x^3-5x^2-8x+12$ ma współczynniki całkowite i współczynnik przy x^3 jest równy 1, więc jeśli ma pierwiastki całkowite, to znajdują się one wśród dzielników wyrazu wolnego równego 12. Bez trudu stwierdzamy, że

$W(1)=0$,

więc liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Zatem wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-1)$. W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymujemy trójmian kwadratowy $x^2-4x-12$, więc

$W(x)=(x-1)(x^2-4x-12)$ (sprawdź!)

Po zapisaniu trójmianu kwadratowego $x^2-4x-12$ w postaci iloczynowej $(x-6)(x+2)$ wielomian $W(x)$ przyjmuje postać:

$W(x)=(x-1)(x-6)(x+2)$

Rozkładamy wielomian $F(x)=x^3-7x^2+6x$ na czynniki; najpierw wyłączamy wspólny czynnik poza nawias, a następnie stosujemy metodę grupowania wyrazów. Otrzymujemy:

$$F(x) = x^3 - 7x^2 + 6x = x(x^2 - 7x + 6) = x(x^2 - x - 6x + 6) = x[x(x-1) - 6(x-1)] =$$
$$= x(x-1)(x-6)$$

- Ustalamy dziedzinę:

  $x - 1 \neq 0, x - 6 \neq 0, x + 2 \neq 0, x \neq 0$, skąd $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 0, 1, 6\}$

- Różnicę ułamków zapisujemy w postaci

$$\frac{x}{x^3-5x^2-8x+12} - \frac{1}{x^3-7x^2+6x} = \frac{x}{(x-1)(x-6)(x+2)} - \frac{1}{x(x-1)(x-6)}$$

Ustalamy wspólny mianownik, którym jest wyrażenie

$x(x-1)(x-6)(x+2)$

Następnie rozszerzamy ułamki do wspólnego mianownika: pierwszy rozszerzamy przez x, drugi rozszerzamy przez $(x + 2)$. Potem odejmujemy ułamki o wspólnym mianowniku

$$\frac{x}{(x-1)(x-6)(x+2)} - \frac{1}{x(x-1)(x-6)} =$$
$$= \frac{x^2}{x(x-1)(x-6)(x+2)} - \frac{x+2}{x(x-1)(x-6)(x+2)} = \frac{x^2-x-2}{x(x-1)(x-6)(x+2)}$$

W wyniku odejmowania $\frac{x}{x^3-5x^2-8x+12} - \frac{1}{x^3-7x^2+6x}$ otrzymaliśmy ułamek

$\frac{x^2-x-2}{x(x-1)(x-6)(x+2)}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 0, 1, 6\}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykonaj działania. Podaj dziedzinę każdego wyrażenia.

a) $\frac{6-x}{x+1} + 1$

b) $\frac{3}{x+2} + \frac{2x-4}{x+2}$

c) $\frac{4x+5}{x^2+3} - \frac{3+4x}{x^2+3}$

d) $\frac{6x+3}{x^2+2x+1} - 3$

e) $\frac{1}{x} - \frac{x^2+3}{x^2+x}$

f) $1 - \frac{5x-10}{x^2-4}$

2. Wykonaj działania. Podaj dziedzinę każdego wyrażenia.

a) $\frac{3x-1}{2x+4} + \frac{x}{x+2}$

b) $\frac{x+7}{x^2-16} + \frac{4}{x+4}$

c) $\frac{x^2+4}{x^3-2x^2} + \frac{3}{x^2}$

d) $\frac{2}{x^2-3x-4} - \frac{x+1}{x-4}$

e) $\frac{x+4}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2-9}$

f) $2 - \frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+2}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych wykonujemy podobnie jak mnożenie i dzielenie ułamków arytmetycznych.

Mnożenie ułamków algebraicznych

Iloczyn ułamków algebraicznych jest ułamkiem algebraicznym o liczniku równym iloczynowi liczników tych ułamków i mianowniku równym iloczynowi mianowników ułamków; dziedziną iloczynu ułamków jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wielomiany występujące w mianownikach obu ułamków nie przyjmują wartości równej zeru.

Aby pomnożyć ułamek algebraiczny przez ułamek algebraiczny:
1) rozkładamy wielomiany w licznikach i mianownikach ułamków na czynniki możliwie najniższego stopnia (o ile to możliwe), a następnie zakładamy, że każdy czynnik w mianowniku każdego z tych ułamków, który nie jest stałą, jest różny od zera;
2) zapisujemy ułamek algebraiczny, którego licznikiem jest iloczyn czynników występujących w licznikach obu ułamków, a mianownikiem – iloczyn czynników w mianownikach tych ułamków;
3) znajdujemy wspólne czynniki dla licznika i mianownika powstałego ułamka, a następnie skracamy ułamek;
4) mnożymy pozostałe po skróceniu czynniki w liczniku i w mianowniku ułamka.

Przykład 1.

Wykonamy mnożenie ułamków:

a) $\frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{2x-6}$ b) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+16}\cdot\frac{2x^2-32}{3x-3}$

Ad a)

$$\frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{2x-6}=$$

- rozkładamy mianowniki ułamków na czynniki
  $x^2-1=(x-1)(x+1)$
  $2x-6=2(x-3)$
  (zauważ, że liczniki ułamków możemy pozostawić bez zmiany)

$$=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2(x-3)}=$$

- zakładamy, że czynniki mianowników ułamków są różne od zera:
  $x\neq-1, x\neq 1, x\neq 3$, więc $D=\boldsymbol{R}-\{-1, 1, 3\}$

$$=\frac{{}^{1}\cancel{2}x\cancel{(x+1)}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}(x-1)\cancel{(x+1)}_{1}(x-3)}=$$

- zapisujemy ułamek algebraiczny, którego licznikiem jest iloczyn liczników obu ułamków, zaś mianownikiem iloczyn mianowników obu ułamków
- skracamy otrzymany ułamek

$$=\frac{x}{x^2-4x+3}$$

- wykonujemy mnożenie w mianowniku ułamka

W wyniku mnożenia $\frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{2x-6}$ otrzymaliśmy ułamek

$\frac{x}{x^2-4x+3}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 1, 3\}$.

Ad b)

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+16} \cdot \frac{2x^2-32}{3x-3} =$$

- rozkładamy liczniki i mianowniki ułamków na czynniki:
  $x^2-2x+1=(x-1)^2$
  $x^2-8x+16=(x-4)^2$
  $2x^2-32=2(x-4)(x+4)$
  $3x-3=3(x-1)$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x-4)^2} \cdot \frac{2(x-4)(x+4)}{3(x-1)} =$$

- zakładamy, że czynniki mianowników ułamków są różne od zera: $x \neq 4$, $x \neq 1$, więc $D = \boldsymbol{R} - \{1, 4\}$

$$= \frac{(x-1)\cdot(x-1)\cdot 2(x-4)\cdot(x+4)}{(x-4)\cdot(x-4)\cdot 3(x-1)} =$$

- zapisujemy ułamek algebraiczny, którego licznikiem jest iloczyn liczników obu ułamków, zaś mianownikiem iloczyn mianowników obu ułamków

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-1)}}\cdot(x-1)\cdot 2\cdot\overset{1}{\cancel{(x-4)}}\cdot(x+4)}{(x-4)\cdot\underset{1}{\cancel{(x-4)}}\cdot 3\cdot\underset{1}{\cancel{(x-1)}}} =$$

- skracamy otrzymany ułamek

$$= \frac{2(x-1)(x+4)}{3(x-4)} = \frac{2x^2+6x-8}{3x-12}$$

- wykonujemy mnożenie w liczniku i mianowniku ułamka

W wyniku mnożenia ułamków $\frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+16} \cdot \frac{2x^2-32}{3x-3}$ otrzymaliśmy ułamek

$\frac{2x^2+6x-8}{3x-12}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{1, 4\}$.

Dzielenie ułamków algebraicznych

Ilorazem dwóch ułamków algebraicznych jest ułamek algebraiczny, który jest iloczynem pierwszego ułamka i odwrotności drugiego ułamka; dziedziną ilorazu ułamków jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wielomiany występujące w mianownikach obu ułamków oraz wielomian występujący w liczniku dzielnika nie przyjmują wartości zero.

Aby podzielić ułamek algebraiczny przez ułamek algebraiczny:

1) rozkładamy wielomiany w licznikach i mianownikach ułamków na czynniki możliwie najniższego stopnia (o ile to możliwe), a następnie zakładamy, że każdy czynnik, różny od stałej, wielomianu w mianowniku każdego z tych ułamków oraz wielomianu w liczniku dzielnika jest różny od zera;
2) mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego ułamka, zgodnie z zasadą mnożenia ułamków algebraicznych.

Przykład 2.

Wykonamy dzielenie ułamków:

a) $\frac{2}{x-7} : \frac{4x}{x-7}$ b) $\frac{x+1}{2x^3+8x^2} : \frac{x^2-1}{3x+12}$

Ad a) Dzielenie jest wykonalne wtedy, gdy:

$x \neq 7$ i $x \neq 0$, czyli $D = \boldsymbol{R} - \{0, 7\}$.

Przystępujemy do dzielenia ułamków:

$$\frac{2}{x-7} : \frac{4x}{x-7} = \frac{2}{x-7} \cdot \frac{x-7}{4x} = \frac{2\cancel{(x-7)}^{1}}{4x\cancel{(x-7)}_{1}} = \frac{1}{2x}$$

W wyniku dzielenia $\frac{2}{x-7} : \frac{4x}{x-7}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{1}{2x}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{0, 7\}$.

Ad b) Wykonamy dzielenie $\frac{x+1}{2x^3+8x^2} : \frac{x^2-1}{3x+12}$.

$2x^3 + 8x^2 = 2x^2(x+4)$

$3x + 12 = 3(x+4)$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

- rozkładamy na czynniki wielomiany występujące w licznikach i mianownikach ułamków
- określamy dziedzinę: $x \neq 0$, $x \neq -4$, $x \neq 1$, $x \neq -1$, więc $D = \boldsymbol{R} - \{-4, -1, 0, 1\}$

$$\frac{x+1}{2x^2(x+4)} : \frac{(x-1)(x+1)}{3(x+4)} =$$

$$= \frac{3(x+1)(x+4)}{2x^2(x+4)(x-1)(x+1)} =$$

- mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego ułamka (zapisujemy mnożenie na wspólnej kresce ułamkowej)

$$= \frac{3\cancel{(x+1)}^{1}\cancel{(x+4)}_{1}}{2x^2\cancel{(x+4)}_{1}(x-1)\cancel{(x+1)}_{1}} =$$

- skracamy otrzymany ułamek

$$= \frac{3}{2x^2(x-1)} = \frac{3}{2x^3-2x^2}$$

- wykonujemy mnożenie w liczniku i mianowniku ułamka

W wyniku dzielenia $\frac{x+1}{2x^3+8x^2} : \frac{x^2-1}{3x+12}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{3}{2x^3-2x^2}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{-4, -1, 0, 1\}$.

Teraz wykorzystamy wszystkie zdobyte do tej pory umiejętności działania na ułamkach algebraicznych w następującym przykładzie.

Przykład 3.

Doprowadzimy podane wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci:

a) $\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2+4x-5}{2x^2-2}$ b) $\frac{x-6}{4x} : \frac{x^2-36}{8} - \frac{x+2}{x+6}$

Ad a) Określamy dziedzinę danego wyrażenia algebraicznego. Wielomiany

$x-1$ oraz $2x^2-2$

występujące w mianownikach ułamków nie mogą przyjmować wartości równej zeru, zatem

$x \neq 1$ i $x \neq -1$, czyli

$D = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$

Teraz należy ustalić kolejność wykonywania działań: najpierw wykonamy działanie dodawania w nawiasie, a następnie otrzymany wynik pomnożymy przez ułamek znajdujący się za nawiasem. Otrzymujemy:

$$\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+4x-5}{2x^2-2}=\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+4x-5}{2x^2-2}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^2+4x-5}{2x^2-2}=$$

$$=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+5)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{\cancel{(x+1)}^{1}\cancel{(x-1)}^{1}(x+5)}{2(x-1)\cancel{(x-1)}_{1}\cancel{(x+1)}_{1}}=\frac{x+5}{2x-2}$$

Jeśli $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, to wyrażenie $\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+4x-5}{2x^2-2}$ jest równe $\frac{x+5}{2x-2}$.

Ad b) Określamy dziedzinę wyrażenia algebraicznego $\frac{x-6}{4x}:\frac{x^2-36}{8}-\frac{x+2}{x+6}$.

Wielomiany $4x$, $x+6$ oraz x^2-36 nie mogą przyjmować wartości zero, zatem

$D = \boldsymbol{R} - \{-6, 0, 6\}$

Teraz wykonamy działania według następującej kolejności: najpierw wykonamy dzielenie ułamków: $\frac{x-6}{4x}:\frac{x^2-36}{8}$, później od otrzymanego wyniku odejmiemy ułamek $\frac{x+2}{x+6}$. Otrzymujemy:

$$\frac{x-6}{4x}:\frac{x^2-36}{8}-\frac{x+2}{x+6}=\frac{x-6}{4x}\cdot\frac{8}{(x-6)(x+6)}-\frac{x+2}{x+6}=$$

$$=\frac{(x-6)\cdot 8}{4x(x-6)(x+6)}-\frac{x+2}{x+6}=\frac{2}{x(x+6)}-\frac{x+2}{x+6}=\frac{2}{x(x+6)}-\frac{x(x+2)}{x(x+6)}=$$

$$=\frac{2-x(x+2)}{x(x+6)}=\frac{-x^2-2x+2}{x^2+6x}$$

Jeśli $x \in \boldsymbol{R} - \{-6, 0, 6\}$, to wyrażenie $\frac{x-6}{4x}:\frac{x^2-36}{8}-\frac{x+2}{x+6}$ jest równe $\frac{-x^2-2x+2}{x^2+6x}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykonaj mnożenie ułamków algebraicznych. Podaj dziedziny wyrażeń.

   a) $\frac{3-x}{x-2}\cdot\frac{2-x}{x-3}$ b) $\frac{2x^2-8x}{6x-3}\cdot\frac{2x-1}{x-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x^3-4x^2}\cdot\frac{x^2-3x-4}{2x+6}$

2. Wykonaj dzielenie ułamków algebraicznych. Podaj dziedziny wyrażeń.

   a) $\frac{9x+9x^2}{5x+10}:\frac{18x}{4x+8}$ b) $\frac{8x-24}{2x^3+x^2}:\frac{x-3}{2x+1}$ c) $\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-81}:\frac{x^2+1}{x+9}$

Zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych

Potrafisz już sprawnie wykonywać działania na wyrażeniach algebraicznych. Tę umiejętność wykorzystamy do dowodzenia twierdzeń dotyczących własności liczb dodatnich.

W klasie pierwszej poznałeś pojęcia średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej. Teraz poznasz pojęcie średniej kwadratowej. W temacie tym udowodnimy twierdzenia o związkach zachodzących pomiędzy tymi średnimi. Z poznanych i udowodnionych własności będziemy korzystali, rozwiązując zadania z algebry i geometrii.

Przykład 1.

Wykażemy, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$.

Założenie: $a>0$ i $b>0$

Teza: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$

Dowód:
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

Zatem

$$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$$

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab$$

Z założenia liczby a i b są dodatnie, więc

$$ab>0$$

Obie strony nierówności dzielimy przez ab, zachowując znak nierówności bez zmiany. Otrzymujemy:

$$\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab} \geqslant 2,$$

skąd

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2,$$

co kończy dowód.

Udowodnioną w przykładzie 1. nierówność wykorzystamy do udowodnienia kolejnej nierówności.

Przykład 2.

Wykażemy, że jeśli liczby a, b, c, d są dodatnie, to $\frac{cd}{ab}+\frac{ad}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{ad}\geqslant 4$.

Założenie: $a>0, b>0, c>0, d>0$

Teza: $\frac{cd}{ab}+\frac{ad}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{ad}\geqslant 4$ (*)

Dowód:

<u>I sposób</u>

Lewą stronę nierówności (*) przedstawimy w postaci iloczynowej, korzystając z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, a następnie skorzystamy z twierdzenia udowodnionego w przykładzie 1. Mamy:

$$\frac{cd}{ab}+\frac{ad}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{ad}=\frac{d}{b}\cdot\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\frac{b}{d}\cdot\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)=$$

$$=\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)\underset{\substack{\text{na podstawie}\\ \text{przykładu 1.}}}{\geqslant} 2\cdot 2=4$$

co kończy dowód.

<u>II sposób</u>

Udowodnimy, że zachodzi nierówność $\frac{cd}{ab}+\frac{ad}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{ad}-4\geqslant 0$, która jest równoważna nierówności zapisanej w tezie. Mamy:

$$\frac{cd}{ab}+\frac{ad}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{ad}-4=\frac{(cd)^2+(ad)^2+(ab)^2+(bc)^2-4abcd}{abcd}=$$

$$=\frac{(cd)^2-2abcd+(ab)^2+(ad)^2-2abcd+(bc)^2}{abcd}=$$

$$=\frac{(cd-ab)^2+(ad-bc)^2}{abcd}\geqslant 0$$

Uzasadnienie:

- liczby a, b, c, d są dodatnie, więc ich iloczyn jest dodatni
- $(cd-ab)^2\geqslant 0$ i $(ad-bc)^2\geqslant 0$, a suma liczb nieujemnych jest nieujemna
- iloraz liczby nieujemnej i liczby dodatniej jest liczbą nieujemną,

co kończy dowód.

W klasie I (podręcznik, str. 128) dowiedziałeś się, że średnia arytmetyczna liczb dodatnich jest nie mniejsza od średniej geometrycznej tych liczb. Teraz udowodnimy tę własność dla dwóch, trzech i czterech liczb dodatnich.

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Założenie: $a > 0$ i $b > 0$

Teza: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

Dowód: Z założenia wiemy, że liczby a i b są dodatnie, więc istnieją liczby $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ oraz prawdziwa jest nierówność

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i otrzymujemy

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$$

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \quad / : 2$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

co kończy dowód.

Przykład 4.

Wykażemy, że jeśli liczby a, b, c oraz d są dodatnie, to $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

Założenie: $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

Teza: $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$

Dowód:

W przykładzie 3. wykazaliśmy, że

jeśli $a > 0, b > 0, c > 0$ i $d > 0$, to $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ i $\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd}$.

Zatem

$$\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \quad / : 2$$

(*) $$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$$

Ale $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$ jest średnią arytmetyczną liczb dodatnich $\sqrt{ab}$ i $\sqrt{cd}$, więc jest to liczba nie mniejsza niż średnia geometryczna tych liczb, czyli

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$$

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{abcd}}$$

$$(**) \quad \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$$

Z (*) i (**) otrzymujemy:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd},$$

czyli

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd},$$

co kończy dowód.

Przykład 5.

Wykażemy, że jeśli liczby a, b i c są dodatnie, to $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

Założenie: $a > 0, b > 0, c > 0$

Teza: $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$

Dowód:
Średnią arytmetyczną dodatnich liczb a, b, c przedstawimy jako średnią arytmetyczną czterech dodatnich liczb a, b, c oraz $\frac{a+b+c}{3}$ w następujący sposób:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{4}{3}(a+b+c)}{4} = \frac{(a+b+c)+\frac{1}{3}(a+b+c)}{4} =$$

$$= \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}$$

Średnia arytmetyczna liczb a, b, c, $\frac{a+b+c}{3}$ jest nie mniejsza niż średnia geometryczna tych liczb, czyli

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}},$$

stąd

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}}$$

Ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu stron nierówności do potęgi czwartej otrzymujemy nierówność równoważną danej

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqslant abc\frac{a+b+c}{3}$$

Dzielimy obie strony nierówności przez $\frac{a+b+c}{3}$, zachowując znak nierówności bez zmiany, bo z założenia liczby a, b i c są dodatnie. Mamy:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc,$$

zatem

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

co kończy dowód.

Ostatnią udowodnioną zależność wykorzystamy do wykazania prawdziwości kolejnej nierówności.

Przykład 6.

Wykażemy, że jeśli a, b, c są dodatnie, to $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$.

Założenie: $a > 0, b > 0, c > 0$

Teza: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$

Dowód:
Tezę przekształcimy równoważnie, dzieląc obie strony nierówności przez 3. Otrzymujemy:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geqslant 1$$

Teraz wystarczy udowodnić, że wyrażenie występujące po lewej stronie nierówności przyjmuje wartość nie mniejszą niż 1. Aby to wykazać, skorzystamy z faktu, że średnia arytmetyczna trzech dodatnich liczb $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ oraz $\frac{c}{a}$ jest nie mniejsza od średniej geometrycznej tych liczb. Mamy:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

Zatem $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geqslant 1$, co należało dowieść.

Średnią kwadratową liczb $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nazywamy liczbę $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$.

Jeśli liczby $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ są dodatnie, to średnia kwadratowa jest nie mniejsza od średniej arytmetycznej tych liczb (równość zachodzi wtedy, gdy liczby są równe, czyli $a_1 = a_2 = \dots = a_n$).
Udowodnimy ten fakt dla trzech dodatnich liczb a, b i c.

Przykład 7.

Wykażemy, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Założenie: $a > 0, b > 0, c > 0$

Teza: $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

Dowód:
Tezę przekształcimy równoważnie. Ponieważ liczby a, b, c są dodatnie, więc obie strony nierówności są dodatnie. Po podniesieniu stron nierówności do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną danej. Mamy:

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 \geqslant 0$$

Teraz wystarczy udowodnić, że różnica $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2$ jest nieujemna.
Mamy:

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = 3a^2+3b^2+3c^2 - (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac) =$$
$$= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac = (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2) =$$
$$= (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geqslant 0$$

Stąd $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykaż, że jeśli $m > 0$ i $0 < b < a$, to $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$.
2. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \cdot (a+b+c) \geqslant 9$.
3. Wykaż, że jeśli a i b są dodatnie, to $3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right) \geqslant 8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) - 10$.

Równania wymierne

Definicja 1.
Równaniem wymiernym z niewiadomą x nazywamy równanie, które można przekształcić równoważnie do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$, gdzie $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x) \neq 0$.

Każde równanie zbudowane tylko z ułamków algebraicznych można doprowadzić do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$. Wówczas dziedziną tego równania wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych, za wyjątkiem tych, które są pierwiastkami wielomianów występujących w mianownikach poszczególnych ułamków.
Ułamek algebraiczny przyjmuje wartość równą zeru wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w liczniku ułamka przyjmuje wartość zero i wielomian w mianowniku jest różny od zera, czyli:

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0 \iff (W(x) = 0 \wedge P(x) \neq 0)$$

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $\frac{x(x+2)}{x} = 0$.

Określamy dziedzinę równania.

$$D = \boldsymbol{R} - \{0\}$$

Następnie wyznaczamy te wartości x, dla których wielomian

$$W(x) = x(x+2)$$

przyjmuje wartość równą zeru. Otrzymujemy

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

$$0 \notin D \qquad -2 \in D$$

Liczba 0 nie należy do dziedziny równania, zatem równanie ma tylko jedno rozwiązanie. Rozwiązaniem równania jest liczba –2.

UWAGA: Ułamek występujący w powyższym równaniu można skrócić, dzieląc jego licznik i mianownik przez x, ale wówczas trzeba założyć, że $x \neq 0$. Otrzymujemy wówczas równanie postaci $x + 2 = 0$, którego dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$. Rozwiązaniem tego równania jest liczba –2.

Przykład 2.

Wykażemy, że równanie wymierne $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = 0$ jest sprzeczne.

Wyznaczamy dziedzinę równania.

$D = \mathbf{R} - \{-3\}$

Przyrównujemy licznik ułamka do zera i otrzymujemy równanie

$x^2 + 6x + 9 = 0,$

czyli

$(x + 3)^2 = 0,$

skąd

$x = -3$

Ale $-3 \notin D$, więc równanie $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = 0$ nie ma rozwiązań.

Przy rozwiązywaniu równań wymiernych często korzystamy z własności proporcji.

Przykład 3.

Rozwiążemy równania:

a) $\frac{x + 2}{x^2 - 2} = x$ b) $\frac{x}{x + 2} = \frac{3}{x} - 1$

Ad a) Określamy dziedzinę równania.

$D = \mathbf{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Przedstawiamy równanie w postaci proporcji.

$\frac{x + 2}{x^2 - 2} = \frac{x}{1}$

Korzystamy z własności proporcji i otrzymujemy:

$x + 2 = (x^2 - 2)x$

$x + 2 = x^3 - 2x$

$x^3 - 2x - x - 2 = 0$

Rozkładamy wielomian znajdujący się po lewej stronie równania na czynniki.

$x^3 - x - 2x - 2 = 0$

$x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$(x + 1)(x + 1)(x - 2) = 0$

Iloczyn jest równy zeru wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników przyjmuje wartość zero.

$x + 1 = 0 \ \vee \ x - 2 = 0$

$x = -1 \ \vee \ x = 2$

$-1 \in D \qquad 2 \in D$

Równanie ma dwa rozwiązania: –1 oraz 2.

Ad b) Określamy dziedzinę równania.

$D = \mathbf{R} - \{-2, 0\}$

Prawą stronę równania przedstawiamy w postaci jednego ułamka.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{3-x}{x}$$

Skorzystamy z własności proporcji, a następnie rozwiążemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$x^2 = (x+2)(3-x)$$

$$2x^2 - x - 6 = 0 \qquad \Delta = 49$$

$$x = -1\frac{1}{2} \ \vee \ x = 2$$

Liczby $-1\frac{1}{2}$ oraz 2 należą do dziedziny równania, zatem są rozwiązaniami równania.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $1 + \frac{16-x^2}{x^3-8} = \frac{1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x-2}$.

Dziedziną równania jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$. Zauważmy, że

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

na podstawie wzoru skróconego mnożenia:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Zatem wspólnym mianownikiem ułamków występujących po obu stronach równania jest wyrażenie $x^3 - 8$. Rozszerzamy ułamki i otrzymujemy

$$\frac{x^3-8}{x^3-8} + \frac{16-x^2}{x^3-8} = \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} + \frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$\frac{x^3-8}{x^3-8} + \frac{16-x^2}{x^3-8} = \frac{x-2}{x^3-8} + \frac{x^2+2x+4}{x^3-8}$$

Następnie sprowadzamy równanie do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$. Mamy

$$\frac{x^3-8+16-x^2-(x-2)-(x^2+2x+4)}{x^3-8} = 0$$

$$\frac{x^3-2x^2-3x+6}{x^3-8} = 0$$

Stąd

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$$

Równanie wielomianowe rozwiązujemy metodą grupowania wyrazów.

$$x^2(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2-3) = 0$$

$$(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$$

$x-2=0 \lor x+\sqrt{3}=0 \lor x-\sqrt{3}=0$

$x=2 \lor x=-\sqrt{3} \lor x=\sqrt{3}$

Liczba 2 nie należy do dziedziny równania.
Równanie ma dwa rozwiązania $-\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3}$.

Niektóre równania wymierne możemy sprowadzić do równań kwadratowych przez podstawienie zmiennej pomocniczej. Poniższy przykład ilustruje taką sytuację.

Przykład 5.

Rozwiążemy równania:

a) $x^2+2x=\dfrac{3}{x^2+2x}+2$ b) $x^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=15$

Ad a) Najpierw wyznaczamy dziedzinę równania:

$x^2+2x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 0 \land x+2\neq 0) \Leftrightarrow (x\neq 0 \land x\neq -2)$

Zatem

$D=\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $t=x^2+2x$ (jeśli $x\in D$, to zmienna t jest różna od zera).
Otrzymujemy równanie

$t=\dfrac{3}{t}+2$

Równanie to sprowadzamy do równania kwadratowego i rozwiązujemy je. Mamy:

$t-\dfrac{3}{t}-2=0 \quad /\cdot t$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$t=3 \lor t=-1$

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania: -1 oraz 3. Aby wyznaczyć rozwiązania równania wymiernego należy jeszcze rozwiązać alternatywę następujących równań:

$x^2+2x=-1 \quad \lor \quad x^2+2x=3$

Otrzymujemy:

$x^2+2x+1=0 \lor x^2+2x-3=0$

$(x+1)^2=0 \quad \lor \quad (x+3)(x-1)=0$

$x+1=0 \quad \lor \quad x+3=0 \lor x-1=0$

$x=-1 \quad \lor \quad x=-3 \lor x=1$

Liczby -3, -1 oraz 1 należą do dziedziny równania.
Równanie $x^2+2x=\dfrac{3}{x^2+2x}+1$ ma trzy rozwiązania: -3, -1 oraz 1.

Ad b) Wyznaczamy dziedzinę równania $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 15$.

Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{1\}$. Na podstawie wzoru skróconego mnożenia

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

przedstawiamy lewą stronę równania w postaci:

$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \left(x + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{x(x-1)+x}{x-1}\right]^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x-1} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x-1}$$

Otrzymujemy równanie:

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x-1} - 15 = 0$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą $t = \frac{x^2}{x-1}$, gdzie $x \neq 1$ i sprowadzamy równanie wyjściowe do równania kwadratowego.

$$t^2 - 2t - 15 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t.

$$(t-5)(t+3) = 0$$

$$t - 5 = 0 \lor t + 3 = 0$$

$$t = 5 \lor t = -3$$

Ponieważ $t = \frac{x^2}{x-1}$, gdzie $x \neq 1$, więc otrzymujemy alternatywę równań:

$$\frac{x^2}{x-1} = 5 \lor \frac{x^2}{x-1} = -3, \text{ gdzie } x \neq 1.$$

Skąd mamy:

$$x^2 = 5x - 5 \quad \lor \quad x^2 = -3x + 3$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \quad \lor \quad x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$\Delta = 5 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{5} \qquad \Delta = 21 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{21}$$

$$x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \lor x = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad \lor \quad x = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \lor x = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$$

Otrzymane liczby należą do dziedziny równania.

Rozwiązaniami równania są liczby: $\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{21}}{2}, \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$.

Przykład 6.

Rozwiążemy równanie

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} = 1.$$

Dziedziną równania jest zbiór

$\boldsymbol{R} - \{-5, -4, -3, -2, -1\}$

W tym przypadku nie będziemy sprowadzać ułamków występujących po lewej stronie równania do wspólnego mianownika. Skorzystamy z następującej własności:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Zatem równanie możemy zapisać w postaci:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} = 1$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} = 1$$

Otrzymujemy:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} = 1$$

$$\frac{x+5-x-1}{(x+1)(x+5)} = 1$$

$$\frac{4}{(x+1)(x+5)} = 1$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$\Delta = 32 \qquad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{2}$$

$$x = -3 - 2\sqrt{2} \ \vee \ x = -3 + 2\sqrt{2}$$

Równanie ma dwa rozwiązania: $-3 - 2\sqrt{2}$ oraz $-3 + 2\sqrt{2}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+7}{x-7} = 0$ b) $\frac{x^2}{x^2-5} = 0$ c) $\frac{x^2+2x}{x} = 0$ d) $\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x} = 0$

2. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x^2-4x-5}{x^3-x} = 0$ b) $\frac{3x-6}{2x+5} = 2$ c) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2x}{x+2}$ d) $\frac{3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x}$

3. Wykaż, że poniższe równania są sprzeczne:

a) $\frac{2}{x+5} = 0$ b) $\frac{(x+1)^2}{x+1} = 0$ c) $\frac{x^2+2}{x+2} = 0$ d) $\frac{3}{x} + \frac{x}{x+4} = 0$

4. Rozwiąż równania:

a) $x^2 + 4x = \frac{20}{x^2+4x} + 1$ b) $\frac{14}{x^2+2x-1} - 9 = -x^2 - 2x + 1$

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych

Przykład 1.

W pewnej książce na każdej stronie znajduje się jednakowa liczba wersów, przy czym wszystkich wersów w książce jest 8400. Gdyby tę książkę wydrukowano w takim formacie, że na każdej stronie byłoby o 5 takich wersów więcej, to liczba stron zmniejszyłaby się o 30. Ile wersów jest na każdej stronie i ile stron ma ta książka?

Analiza:

x – liczba wersów na stronie, $x \in \boldsymbol{N}_+$

$\frac{8400}{x}$ – liczba stron w książce

$\frac{8400}{x+5}$ – liczba stron w książce w zmienionym formacie

$\frac{8400}{x} - 30$ – liczba stron w książce w zmienionym formacie

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$\frac{8400}{x} - 30 = \frac{8400}{x+5}, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{N}_+$$

$$\frac{8400 - 30x}{x} = \frac{8400}{x+5}$$

$$(8400 - 30x)(x+5) = 8400x$$

$$8400x + 42\,000 - 30x^2 - 150x - 8400x = 0$$

$$-30x^2 - 150x + 42\,000 = 0$$

$$x^2 + 5x - 1400 = 0$$

$$\Delta = 5625 \qquad \sqrt{\Delta} = 75$$

$$x = -40 \quad \vee \quad x = 35$$

Liczba -40 nie spełnia warunku $x \in \boldsymbol{N}_+$.

Wyznaczamy liczbę stron książki: $8400 : 35 = 240$.

Sprawdzenie:

Książka w początkowym formacie liczyła 240 stron, a na każdej stronie było 35 wersów, więc książka zawierała 8400 wersów ($240 \cdot 35 = 8400$). Po zmianie formatu na jednej stronie znalazłoby się 40 wersów ($35 + 5 = 40$). Wówczas liczba stron byłaby równa 210 stron ($8400 : 40 = 210$). Zatem liczba stron byłaby mniejsza o 30 niż w formacie początkowym.

Odpowiedź:

Książka liczy 240 stron, a na każdej jej stronie jest 35 wersów.

Przykład 2.

Z miast A i B odległych o 440 km wyjechały naprzeciw siebie (po sąsiednich torach) dwa pociągi towarowe. Pociąg jadący z miasta A wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B i jechał z prędkością o 11 km/h mniejszą. Pociągi minęły się w połowie drogi. Obliczymy, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Analiza:

v – prędkość pociągu jadącego z miasta B do miasta A (km/h); $v > 0$

t – czas (do chwili minięcia) jazdy pociągu jadącego z miasta B do miasta A (h); $t > 0$

$v - 11$ – prędkość pociągu jadącego z miasta A do miasta B (km/h)

$t + 1$ – czas (do chwili minięcia) jazdy pociągu jadącego z miasta A do miasta B (h)

$v \cdot t$ – długość drogi, jaką przebył pociąg jadący z miasta B do chwili, w której pociągi się minęły (km)

$(v-11)(t+1)$ – długość drogi, jaką przebył pociąg jadący z miasta A do chwili, kiedy pociągi się minęły (km)

220 – długość drogi (km), jaką pokonał każdy z pociągów do chwili minięcia

Ułożenie i rozwiązanie równania:

Mamy układ warunków:

$$\begin{cases} v \cdot t = 220 \\ (v-11)(t+1) = 220 \end{cases}$$

Wyznaczamy z pierwszego równania $t = \frac{220}{v}$ i podstawiamy do drugiego równania; otrzymujemy równanie wymierne z niewiadomą v:

$$(v-11)\left(\frac{220}{v} + 1\right) = 220 \quad / \cdot v$$

$$(v-11)(220+v) = 220v$$

$$v^2 - 11v - 2420 = 0$$

$$v = -44 \quad \vee \quad v = 55$$

Liczba -44 nie spełnia założenia $v > 0$.

Obliczamy prędkość pociągu, który jechał z miasta A: $55 - 11 = 44$ (km/h).

Sprawdzenie:

Pociąg jadący z miasta B rozwijał prędkość 55 km/h, zaś pociąg jadący z miasta A – prędkość 44 km/h. Pociągi te minęły się w połowie drogi. Czas przejazdu do momentu spotkania dla pociągu jadącego z miasta B wyniósł 4 h (220 km : 55 km/h = 4 h), zaś dla pociągu jadącego z miasta A był równy 5 h (220 km : 44 km/h = 5 h). To znaczy, że pociąg jadący z miasta A wyjechał o godzinę wcześniej.

Odpowiedź:

Pociągi jechały z prędkością 55 km/h oraz 44 km/h.

Przykład 3.

Studenci Maciek i Krzysiek myją raz w miesiącu okna w salonie samochodowym. Pracując we dwóch, potrzebują 6 godzin na realizację tego zlecenia. Pewnego dnia po dwóch godzinach wspólnej pracy Krzysiek zachorował i Maciek dokończył mycie okien w czasie kolejnych 10 godzin. Obliczymy, ile godzin potrzebowałby każdy z nich na samodzielne wykonanie tej pracy.

Analiza:
Oznaczmy pracę do wykonania jako całość, czyli 1. Studenci na wykonanie zlecenia potrzebują 6 godzin, czyli pracując razem, wykonują $\frac{1}{6}$ część umowy w czasie 1 godziny. Ponieważ feralnego dnia pracowali razem przez 2 godziny, wykonali wspólnie $\frac{1}{3}$ zlecenia. Pozostałą do realizacji część umowy, czyli $\frac{2}{3}$ pracy wykonał samodzielnie Maciek w czasie 10 godzin.
Niech:
x – oznacza liczbę godzin potrzebnych na samodzielne wykonanie zlecenia przez Maćka,
y – oznacza liczbę godzin potrzebnych na samodzielne wykonanie zlecenia przez Krzyśka,
$\frac{1}{x}$ – część pracy, jaką wykona samodzielnie Maciek w czasie 1 godziny,
$\frac{1}{y}$ – część pracy, jaką wykona samodzielnie Krzysiek w czasie 1 godziny,
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – część pracy, jaką wykonują wspólnie Maciek i Krzysiek w czasie 1 godziny.

Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \\ 10\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x}=\frac{2}{3} \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{6}-\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=30 \\ \frac{1}{y}=\frac{x-6}{6x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=\frac{6x}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=\frac{6\cdot 15}{15-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=10 \end{cases}$$

Sprawdzenie:
Maciek na samodzielne wykonanie pracy potrzebuje 15 godzin, a Krzysiek 10 godzin, czyli w czasie 1 godziny Maciek wykona $\frac{1}{15}$ pracy, zaś Krzysiek $\frac{1}{10}$ tej pracy. W czasie 6 godzin, pracując razem, wykonaliby całą pracę.

$$6\cdot\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)=6\cdot\frac{2+3}{30}=6\cdot\frac{1}{6}=1$$

Przez 2 godziny chłopcy pracowali wspólnie, potem w czasie 10 godzin Maciek pracował sam. Wykonali wówczas całą pracę.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) + 10 \cdot \frac{1}{15} = 2 \cdot \frac{5}{30} + \frac{10}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Odpowiedź:
Maciek sam wykona pracę w czasie 15 godzin, a Krzysiek w czasie 10 godzin.

Przykład 4.

Basen napełniany jest wodą przez dwa krany. Jeśli woda wpływa do basenu pierwszym kranem, to czas napełniania jest o 4 godziny krótszy, niż gdy wpływa drugim kranem. Jeśli natomiast basen napełniany jest z wykorzystaniem obu kranów jednocześnie, to czas napełniania jest o 7 godzin i 12 minut krótszy, niż gdyby woda wpływała do niego tylko przez drugi kran. Obliczymy, ile godzin będzie trwało napełnienie basenu tylko z wykorzystaniem pierwszego kranu, a ile z wykorzystaniem tylko drugiego kranu.

Analiza:
1 – pojemność basenu
x – czas [h] potrzebny do napełnienia basenu z wykorzystaniem tylko pierwszego kranu, $x > 0$
$x+4$ – czas [h] potrzebny do napełnienia basenu z wykorzystaniem tylko drugiego kranu
$\frac{1}{x}$ – taka część basenu zostanie wypełniona wodą wpływającą tylko z pierwszego kranu, w czasie 1 godziny
$\frac{1}{x+4}$ – taka część basenu zostanie wypełniona wodą wpływającą tylko z drugiego kranu, w czasie 1 godziny
$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$ – taka część basenu zostanie w czasie 1 godziny wypełniona wodą wypływającą jednocześnie z obu kranów
$(x+4) - 7\frac{1}{5}$ – czas [h] potrzebny do napełnienia basenu wodą z wykorzystaniem obu kranów jednocześnie

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$\left[(x+4) - 7\frac{1}{5}\right] \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) = 1$$

$$(x-3{,}2) \cdot \frac{2x+4}{x(x+4)} = 1$$

$$(x-3{,}2) \cdot (2x+4) = x(x+4)$$

$$2x^2 - 2{,}4x - 12{,}8 = x^2 + 4x$$

$$x^2 - 6{,}4x - 12{,}8 = 0$$

$\Delta = 92{,}16 \qquad \sqrt{\Delta} = 9{,}6$

$x_1 = -1{,}6 \qquad x_2 = 8$

Liczba $-1,6$ nie spełnia założenia $x > 0$. Czas napełniania basenu przez pierwszy kran wynosi 8 godzin, a przez drugi kran jest o 4 godziny dłuższy i wynosi 12 godzin.

Sprawdzenie:
Jeśli basen napełniany jest przez dwa krany jednocześnie, to czas napełniania wynosi:

$4\frac{4}{5}$ h, bo $12\text{ h} - 7\frac{1}{5}\text{h} = 4\frac{4}{5}\text{h}$

Sprawdzamy, czy w tym czasie basen zostanie napełniony.

$$4\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)=\frac{24}{5}\cdot\frac{2+3}{24}=\frac{24}{5}\cdot\frac{5}{24}=1$$

Odpowiedź:
Czas napełniania basenu przez pierwszy kran jest równy 8 godzin, a przez drugi – 12 godzin.

Przykład 5.

Stopiono dwa kawałki stopu srebra i otrzymano stop o masie 8 kg. W pierwszym stopie było 0,6 kg srebra, a w drugim – 1,2 kg srebra. Zawartość procentowa srebra w pierwszym stopie była o 4 punkty procentowe mniejsza niż w drugim stopie. Obliczymy procentową zawartość srebra w każdym stopie.

Analiza:

$$\begin{cases} m_1 \text{ – masa pierwszego stopu [kg]} \\ m_2 \text{ – masa drugiego stopu [kg]} \\ 8 \text{ – masa otrzymanego stopu [kg],} \end{cases}$$

czyli

$$m_1 + m_2 = 8$$

$x\%$ – zawartość procentowa srebra w pierwszym stopie, $x > 0$

$(x+4)\%$ – zawartość procentowa srebra w drugim stopie

$$\begin{cases} m_1 \cdot x\% \text{ – masa srebra w pierwszym stopie [kg]} \\ 0{,}6 \text{ – masa srebra w pierwszym stopie [kg],} \end{cases}$$

czyli

$$m_1 \cdot x\% = 0{,}6,$$

skąd

$$m_1 = \frac{0{,}6}{x\%}$$

$$m_1 = \frac{60}{x}$$

$$\begin{cases} m_2 \cdot (x+4)\% \text{ – masa srebra w drugim stopie [kg]} \\ 1{,}2 \text{ – masa srebra w drugim stopie [kg],} \end{cases}$$

czyli

$$m_2 \cdot (x+4)\% = 1{,}2$$

$$m_2 = \frac{1{,}2}{(x+4)\%}$$

$$m_2 = \frac{120}{x+4}$$

<u>Ułożenie i rozwiązanie równania:</u>

$$\frac{60}{x} + \frac{120}{x+4} = 8 \quad / : 4$$

$$\frac{15}{x} + \frac{30}{x+4} = 2$$

$$\frac{45x+60}{x(x+4)} = 2$$

$$45x + 60 = 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 - 37x - 60 = 0$$

$$\Delta = 1849 \qquad \sqrt{\Delta} = 43$$

$$x_1 = -1{,}5 \qquad x_2 = 20$$

Liczba $-1{,}5$ nie spełnia warunku zadania $x > 0$.
Zawartość procentowa srebra w pierwszym stopie wynosi 20%, a w drugim 24%.

<u>Sprawdzenie:</u>
W pierwszym stopie o masie m_1 zawartość srebra wynosi 20%, więc $0{,}2 \cdot m_1 = 0{,}6$ kg, skąd $m_1 = 3$ kg.
W drugim stopie o masie m_2 zawartość srebra jest równa 24%, czyli $0{,}24 \cdot m_2 = 1{,}2$ kg, zatem $m_2 = 5$ kg.
Masa powstałego stopu to 8 kg (3 kg + 5 kg = 8 kg).

<u>Odpowiedź:</u>
Zawartość procentowa srebra w pierwszym stopie jest równa 20%, a w drugim 24%.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Prędkość własna motorówki wynosi 15 km/h. Motorówka ta wyruszyła z przystani rzecznej A i po przypłynięciu do przystani B od razu zawróciła, kierując się do przystani A. Trasę od A do B i z powrotem, długości 120 km, pokonała w czasie 8 godzin i 20 minut. Jaką prędkość ma prąd rzeki?

2. Zbiornik wodny można opróżnić za pomocą dwóch pomp o różnej wydajności. Pierwsza pompa, pracując samodzielnie, opróżnia zbiornik w czasie o 3 godziny dłuższym niż druga pompa. Pewnego dnia pierwsza pompa pracowała samodzielnie przez 1,5 godziny, a następnie opróżnianie zbiornika dokończyły obie pompy, pracując razem przez 5,5 godziny.
Oblicz, ile godzin potrzeba, aby pierwsza pompa samodzielnie opróżniła zbiornik.

Nierówności wymierne

Definicja 1.
Nierównością wymierną z jedną niewiadomą x nazywamy każdą z nierówności, którą można sprowadzić do jednej z czterech postaci $\frac{W(x)}{P(x)} < 0$, $\frac{W(x)}{P(x)} \leqslant 0$, $\frac{W(x)}{P(x)} > 0$ lub $\frac{W(x)}{P(x)} \geqslant 0$, gdzie $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x) \not\equiv 0$.

Podobnie jak w przypadku równań, dziedziną nierówności wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych, za wyjątkiem tych liczb, które są pierwiastkami wielomianów, znajdujących się w mianownikach ułamków algebraicznych występujących w tej nierówności.

Rozwiązywanie nierówności wymiernych pokażemy na przykładach.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówności:

a) $\frac{x+3}{x-6} > 0$ b) $\frac{4x+1}{x+5} \leqslant \frac{x+3}{x+5}$ c) $\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{2}$

Ad a) Nierówność mająca postać

$$\frac{W(x)}{P(x)} > 0$$

jest równoważna alternatywie

$$W(x) > 0 \text{ i } P(x) > 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ i } P(x) < 0.$$

Jest też równoważna warunkowi

$$W(x) \cdot P(x) > 0$$

Warunki te symbolicznie możemy zapisać tak:

1) $\frac{W(x)}{P(x)} > 0 \Leftrightarrow [(W(x) > 0 \wedge P(x) > 0) \vee (W(x) < 0 \wedge P(x) < 0)]$

2) $\frac{W(x)}{P(x)} > 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) > 0$

Najpierw określamy dziedzinę nierówności $\frac{x+3}{x-6} > 0$. Otrzymujemy:

$$D = \mathbf{R} - \{6\}$$

Korzystamy z punktu 1): Rozpatrujemy znaki licznika i mianownika ułamka, występującego po lewej stronie nierówności.

Ułamek $\frac{x+3}{x-6}$ jest dodatni tylko wtedy, gdy licznik i mianownik ułamka mają jednakowe znaki, czyli wtedy, gdy:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-6>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3<0 \\ x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>6 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-3 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow [x \in (6,+\infty) \vee x \in (-\infty,-3)]$$

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x+3}{x-6} > 0$ jest zbiór $(-\infty,-3) \cup (6,+\infty)$.

<u>Korzystamy z punktu 2)</u>: Mnożymy nierówność przez <u>kwadrat mianownika</u>.
Zauważ, że wielomian $(x-6)$ występujący w mianowniku ułamka przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Nie możemy więc pomnożyć obu stron nierówności przez wyrażenie $(x-6)$. Mnożenie stron nierówności przez wyrażenie $(x-6)^2$, które jest dodatnie dla każdej liczby należącej do dziedziny, nie zmienia znaku nierówności.
Otrzymujemy:

$$\frac{x+3}{x-6} > 0 \quad / \cdot (x-6)^2$$

$$(x+3)(x-6) > 0$$

Teraz wystarczy rozwiązać nierówność kwadratową i uwzględnić dziedzinę nierówności.
Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x+3}{x-6} > 0$ jest zbiór $(-\infty,-3) \cup (6,+\infty)$.

Ad b) $\frac{4x+1}{x+5} \leqslant \frac{x+3}{x+5}$

Dziedziną nierówności jest zbiór

$\boldsymbol{R} - \{-5\}$

Sprowadzamy nierówność do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} \leqslant 0$.

$$\frac{4x+1}{x+5} \leqslant \frac{x+3}{x+5}, \text{ skąd}$$

$$\frac{4x+1}{x+5} - \frac{x+3}{x+5} \leqslant 0, \text{ zatem}$$

$$\frac{3x-2}{x+5} \leqslant 0$$

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika (dlaczego?)

$$\frac{3x-2}{x+5} \leqslant 0 \quad / \cdot (x+5)^2$$

$$(3x-2)(x+5) \leqslant 0$$

Zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej jest przedział $\left\langle -5, \frac{2}{3} \right\rangle$. Ale liczba (-5) nie należy do dziedziny nierówności. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{4x+1}{x+5} \leqslant \frac{x+3}{x+5}$ jest przedział $\left(-5, \frac{2}{3} \right\rangle$.

Ad c) $\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{2}$

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych. Sprowadzamy najpierw nierówność do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} < 0$. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} < 0, \text{ skąd}$$

$$\frac{-x^2+1}{2(x^2+1)} < 0$$

Zauważ, że dla każdej liczby rzeczywistej wyrażenie w mianowniku ułamka

$$2(x^2+1)$$

jest dodatnie, zatem obie strony nierówności możemy pomnożyć przez $2(x^2+1)$. Znak nierówności pozostanie bez zmiany. Otrzymujemy:

$$-x^2+1 < 0$$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową

$$-x^2+1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Ponieważ dziedziną nierówności

$$\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{2}$$

jest zbiór $\boldsymbol{R}$, więc zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej jest też zbiorem rozwiązań nierówności wymiernej.

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{2}$ jest zbiór $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $\frac{x-3}{x+1} \leqslant \frac{x+2}{x-2}$.

Określamy dziedzinę nierówności.

$$D = \boldsymbol{R} - \{-1, 2\}$$

Przekształcamy nierówność do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} \leqslant 0$. Otrzymujemy:

$$\frac{x-3}{x+1} - \frac{x+2}{x-2} \leqslant 0$$

$$\frac{(x-3)(x-2)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$\frac{-4(2x-1)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$$

Wyrażenie $(x+1)(x-2)$ przyjmuje w zbiorze D zarówno wartości dodatnie, jak też ujemne, więc żeby otrzymać nierówność równoważną danej, pomnożymy obie strony nierówności przez

$$[(x+1)(x-2)]^2$$

(wyrażenie $[(x+1)(x-2)]^2$ jest dodatnie dla każdej liczby ze zbioru D).

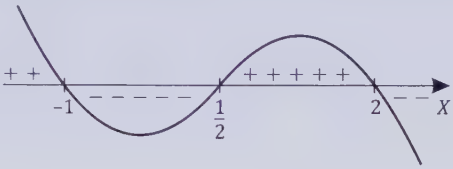
Mamy:

$$-4(2x-1)(x+1)(x-2) \leqslant 0$$

Wielomian $W(x) = -4(2x-1)(x+1)(x-2)$ ma trzy pierwiastki jednokrotne:

$$-1, \frac{1}{2} \text{ oraz } 2.$$

Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest ujemny. Szkicujemy fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$ i odczytujemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja wielomianowa przyjmuje wartości niedodatnie.



$$W(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left\langle -1, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 2, +\infty)$$

Teraz należy uwzględnić dziedzinę nierówności wymiernej.

$$\left[x \in \left\langle -1, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 2, +\infty) \wedge x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 2\} \right] \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{2} \right\rangle \cup (2, +\infty)$$

Zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x-3}{x+1} \leqslant \frac{x+2}{x-2}$ to $\left(-1, \frac{1}{2} \right\rangle \cup (2, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{-9}{x} \geqslant 0$

b) $\frac{5}{x} < 1$

c) $\frac{4+x}{x-1} \leqslant 0$

d) $\frac{3}{x+2} < \frac{5x}{x+2}$

2. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{x^2-4x}{x^4+8} < 0$

b) $\frac{x-5}{x+2} \leqslant \frac{3x}{x+2}$

c) $\frac{4x+6}{x-3} \leqslant 2 - \frac{x}{x-3}$

d) $\frac{x^2+4x+4}{x+2} > 0$

3. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{x-1}{x+3} \leqslant \frac{x}{x+2}$

b) $\frac{x}{x-3} \geqslant \frac{-1}{(x-3)(x+2)}$

Równania i nierówności wymierne z parametrem

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), dla których równanie $\frac{m}{x-1} = \frac{x-5}{2}$ ma jedno rozwiązanie.

<u>I sposób</u> (rozwiązanie algebraiczne)
Określamy dziedzinę równania:

$$D = \mathbf{R} - \{1\}.$$

Sprowadzamy równanie wymierne do równania kwadratowego, korzystając z własności proporcji:

$$\frac{m}{x-1} = \frac{x-5}{2}$$

$$(x-1)(x-5) = 2m$$

$$x^2 - 6x + 5 - 2m = 0$$

Równanie wymierne

$$\frac{m}{x-1} = \frac{x-5}{2}$$

ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie kwadratowe

$$x^2 - 6x + 5 - 2m = 0$$

ma jedno rozwiązanie różne od 1 lub dwa rozwiązania, z których jedno jest równe 1.
Oznaczmy lewą stronę równania kwadratowego:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 - 2m$$

Otrzymujemy następujące warunki:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Obliczamy:

- $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - 2m) = 8m + 16$
- $f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 - 2m = -2m$

Mamy:

$$\begin{cases} 8m + 16 = 0 \\ -2m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 8m + 16 > 0 \\ -2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m \in \mathbf{R} - \{0\} \end{cases} \vee \begin{cases} m \in (-2, +\infty) \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m = -2 \vee m = 0) \Leftrightarrow m \in \{-2, 0\}$$

Równanie $\frac{m}{x-1} = \frac{x-5}{2}$ ma jedno rozwiązanie wtedy, gdy $m \in \{-2, 0\}$.

<u>II sposób</u> (rozwiązanie z wykorzystaniem wykresów funkcji)
Określamy dziedzinę równania

$$D = \mathbf{R} - \{1\}.$$

Sprowadzamy równanie wymierne

$$\frac{m}{x-1}=\frac{x-5}{2}$$

do równania

$$x^2-6x=2m-5, \text{ gdzie } x\neq 1.$$

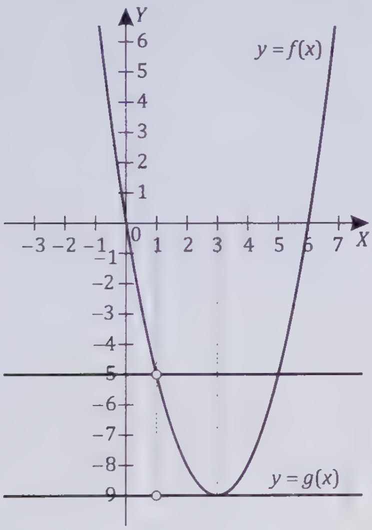
Otrzymane równanie traktujemy jako równość wartości dwóch funkcji zmiennej x:

$f(x)=x^2-6x$ oraz $g(x)=2m-5$ określonych w zbiorze $\boldsymbol{R}-\{1\}$.

Równanie wymierne ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wykresy funkcji f i g mają jeden punkt wspólny.

Aby naszkicować wykres funkcji f, obliczamy potrzebne wielkości:
- miejsce zerowe: 0 oraz 6,
- współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f: $(3, -9)$.

Poniższy rysunek ilustruje tę sytuację.



$f(x)=x^2-6x, \quad x\in\boldsymbol{R}-\{1\}$

Wykresem funkcji f jest parabola, z której usunięto punkt $(1,-5)$.

Wykresy funkcji f i g mają jeden punkt wspólny wtedy, gdy

$$g(x)=-9 \text{ lub } g(x)=-5.$$

Zatem:

$$(2m-5=-9 \lor 2m-5=-5) \Leftrightarrow (2m=-4 \lor 2m=0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m=-2 \lor m=0) \Leftrightarrow m\in\{-2, 0\}$$

Równanie $\frac{m}{x-1}=\frac{x-5}{2}$ ma jedno rozwiązanie wtedy, gdy $m\in\{-2, 0\}$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m $(m\in\boldsymbol{R})$, dla których równanie

$$\frac{x^2+(2m-3)x+m^2-5m}{x-2}=0$$

ma dwa różne rozwiązania jednakowych znaków.

Dziedziną równania jest zbiór $\mathbf{R} - \{2\}$.
Równanie wymierne ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy równanie kwadratowe

$$x^2 + (2m-3)x + m^2 - 5m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1 oraz x_2, z których każde jest różne od 2. Rozwiązania te są jednakowych znaków wtedy, gdy ich iloczyn jest dodatni.
Otrzymujemy zatem następujące warunki:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \quad \text{gdzie } f(x) = x^2 + (2m-3)x + m^2 - 5m. \end{cases}$$

Obliczamy:

- $\Delta = (2m-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 5m) = 8m + 9$
- $f(2) = 4 + (2m-3) \cdot 2 + m^2 - 5m = m^2 - m - 2$
- $x_1 \cdot x_2 = m^2 - 5m$

Rozwiązujemy otrzymany układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 9 > 0 \\ m^2 - m - 2 \neq 0 \\ m^2 - 5m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m > -9 \\ (m-2)(m+1) \neq 0 \\ m(m-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m > -1\frac{1}{8} \\ m \in \mathbf{R} - \{-1, 2\} \\ m \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-1\frac{1}{8}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (5, +\infty)$$

Równanie wymierne ma dwa różne rozwiązania jednakowych znaków wtedy, gdy

$$m \in \left(-1\frac{1}{8}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (5, +\infty)$$

Przykład 3.

Wyznaczymy zbiór tych wszystkich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), dla których nierówność $\frac{mx^2 + mx + 0{,}5}{x^2 - mx + 4} > 0$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste.

Wyznaczymy najpierw wszystkie wartości parametru m, dla których dziedziną nierówności wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych. Żądamy zatem, aby wyrażenie

$$x^2 - mx + 4$$

nie przyjmowało wartości równej zeru. Tak się dzieje tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu $x^2 - mx + 4$ jest ujemny, czyli

$(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$, zatem $m^2 - 16 < 0$, skąd

$m \in (-4, 4)$

Zauważmy, że dla każdej liczby $m \in (-4, 4)$ wyrażenie $x^2 - mx + 4$ jest dodatnie (dlaczego?).

Zatem wartość ułamka $\dfrac{mx^2 + mx + 0{,}5}{x^2 - mx + 4}$ jest dodatnia tylko wtedy, gdy jego licznik jest dodatni, czyli wtedy, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$mx^2 + mx + 0{,}5 > 0, \text{ gdzie } m \in (-4, 4).$$

Rozpatrzymy dwa przypadki:

I. $m = 0$ oraz II. $m \in (-4, 0) \cup (0, 4)$.

Ad I. Jeśli $m = 0$, wówczas nierówność ma postać $0{,}5 > 0$ i jej zbiorem rozwiązań jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Zatem w tym przypadku spełnione są warunki zadania.

Ad II. Jeśli $m \in (-4, 0) \cup (0, 4)$, wówczas nierówność jest kwadratowa i spełnia ją każda liczba rzeczywista tylko wtedy, gdy współczynnik przy x^2 jest dodatni i $\Delta < 0$. Otrzymujemy następujący układ warunków:

$$\begin{cases} m \in (0, 4) \\ m^2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (0, 4) \\ m(m-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (0, 4) \\ m \in (0, 2) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0, 2)$$

Po zsumowaniu rozwiązań otrzymanych w obu przypadkach formułujemy odpowiedź. Nierówność wymierną $\dfrac{mx^2 + mx + 0{,}5}{x^2 - mx + 4} > 0$ spełnia każda liczba rzeczywista wtedy, gdy $m \in \langle 0, 2)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których równanie wymierne ma jedno rozwiązanie, jeśli:

   a) $\dfrac{6 - m}{x - 4} = x$ b) $\dfrac{m + 3}{x - 1} = 2 - x$

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których równanie wymierne $\dfrac{m + 1}{x - 1} = 5 - x$ ma dwa różne rozwiązania.

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których równanie $\dfrac{x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2m}{x + 3} = 0$ ma dwa różne rozwiązania jednakowych znaków.

4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których zbiorem rozwiązań nierówności $\dfrac{mx^2 + 5mx - 1}{x^2 - 3x + 4} < 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Proporcjonalność odwrotna

Na lekcji fizyki poznałeś prawo Boyle'a-Mariotte'a, które informuje nas, że objętość V gazu doskonałego i jego ciśnienie p są w stałej temperaturze wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, czyli

$p \cdot V = \text{constans}$

Definicja 1.

Proporcjonalnością odwrotną nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi x, y, określoną wzorem $x \cdot y = a$, gdzie a jest liczbą różną od zera. O zmiennych x i y mówimy, że są odwrotnie proporcjonalne. Współczynnik a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej**.

Przykład 1.

a) Szukamy par liczb rzeczywistych (x, y), których iloczyn jest stały i wynosi -3. Interesują nas wszystkie pary liczb rzeczywistych, spełniające równanie

$x \cdot y = -3$

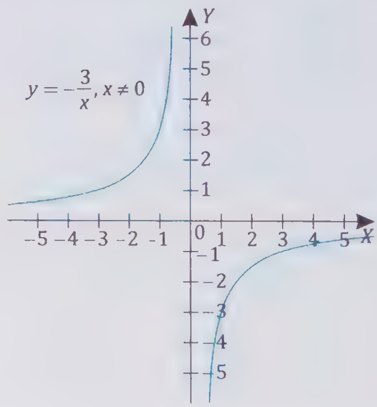
Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne; liczba -3 jest współczynnikiem proporcjonalności.

Równanie $x \cdot y = -3$ możemy zapisać w postaci

$y = -\frac{3}{x}$, gdzie $x \neq 0$

(liczba x równa 0 nie spełnia równania $x \cdot y = -3$). Szukane pary (x, y) spełniające równanie $x \cdot y = -3$ to współrzędne punktów należących do hiperboli będącej wykresem funkcji $y = -\frac{3}{x}$, gdzie $x \neq 0$ (rysunek obok). Jest nieskończenie wiele par liczb spełniających równanie

$x \cdot y = -3$



b) Odcinek AB o długości 12 cm dzielimy na x jednakowych części o długości y centymetrów każda, tak aby długość każdej części była liczbą naturalną.

Związek pomiędzy liczbą odcinków a ich długością możemy zapisać:

$x \cdot y = 12$, gdzie $x \in N_+$ i $y \in N_+$.

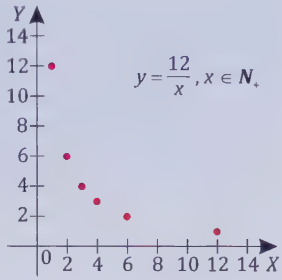
Liczba równych odcinków, na które dzielimy odcinek AB, jest odwrotnie proporcjonalna do ich długości. Liczba 12 jest współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej.

Zależność $x \cdot y = 12$, gdzie $x \in \mathbf{N}_+$, $y \in \mathbf{N}_+$, możemy zapisać w postaci $y = \frac{12}{x}$. Punkty o współrzędnych (x, y), gdzie x oznacza liczbę części, na jakie podzielono odcinek AB, a y – długość każdej z części wyrażającej się liczbą naturalną dodatnią, tworzą wykres funkcji

$$y = \frac{12}{x}, \text{ gdzie } x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

(rysunek obok). Jest sześć par liczb spełniających warunki zadania:

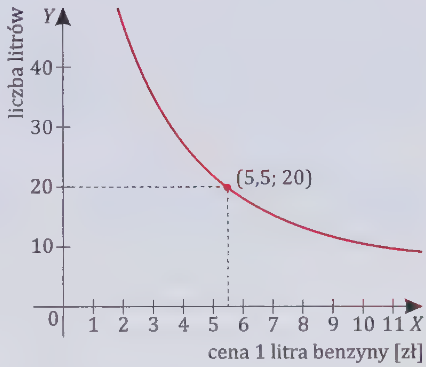
$(1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1)$.



Przykład 2.

Pewien kierowca ma zwyczaj kupowania benzyny za stałą kwotę. Poniższy wykres przedstawia zależność między ceną 1 litra benzyny a liczbą litrów zatankowanego paliwa, przy stałej kwocie przeznaczonej na ten cel. Na wykresie (rysunek poniżej) zaznaczono punkt odpowiadający transakcji z dnia 12.11.2012.

a) Napiszemy wzór opisujący zależność między ceną 1 litra benzyny a liczbą kupionych litrów paliwa. Wskażemy współczynnik proporcjonalności.
b) Obliczymy, ile litrów paliwa kupił kierowca 5.04.2013, jeśli cena benzyny wzrosła o 4% w stosunku do ceny z 12.11.2012.
c) W dniu 22.02.2010 kierowca kupił za tę samą kwotę o 5 litrów benzyny więcej niż 12.11.2012. Obliczymy, ile wtedy kosztował litr benzyny.



Ad a) Cena 1 litra benzyny i liczba zakupionych litrów benzyny to wielkości odwrotnie proporcjonalne. Współczynnikiem proporcjonalności jest stała kwota k przeznaczana na zakup paliwa. Zatem

$$k = 5{,}5 \cdot 20 = 110 \text{ (zł)}$$

Wzór opisujący zależność, której wykres jest przedstawiony na rysunku, to

$$x \cdot y = 110, \text{ gdzie } x > 0.$$

Ad b) Jeśli cena 1 litra benzyny wzrosła o 4%, to 5.04.2013 za tę samą kwotę kierowca kupił

$$\frac{110}{1{,}04 \cdot 5{,}5} = \frac{110}{5{,}72} \approx 19{,}23 \text{ litra benzyny.}$$

Ad c) W dniu 22.02.2010 kierowca za tę samą kwotę kupił 25 litrów benzyny. Zatem litr benzyny kosztował

$$110 : 25 = 4{,}40 \text{ (zł)}$$

Zastanówmy się teraz, jak w przypadku dodatnich wielkości odwrotnie proporcjonalnych zmiana jednej z nich wpływa na zmianę drugiej. W tym celu rozważymy prostokąty o stałym polu 10 cm^2. Przyjmijmy oznaczenia:

x – długość jednego boku prostokąta (w cm), $x > 0$

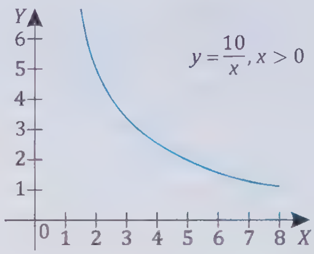
y – długość drugiego boku prostokąta (w cm), $y > 0$.

Pole prostokąta wyraża się wzorem:

$P = x \cdot y$, zatem $x \cdot y = 10$.

Długości boków prostokąta są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Współczynnikiem proporcjonalności jest liczba równa polu prostokąta, czyli 10. Po wyznaczeniu zmiennej y ze wzoru otrzymujemy $y = \frac{10}{x}$.

Funkcja $y = \frac{10}{x}$, gdzie $x > 0$, jest funkcją malejącą, więc wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji maleją (i odwrotnie: jeśli argumenty maleją, to wartości funkcji rosną).



Na podstawie poniższej tabelki przeanalizujmy, w jaki sposób zmiana wartości zmiennej x wpływa na wartość zmiennej y.

Długość boku x (cm)	0,25	0,5	1	2	4	5
Długość boku y (cm)	40	20	10	5	2,5	2

Na pewno zauważyłeś, że jeśli długość boku x prostokąta zwiększymy, na przykład dwa razy, to dwa razy zmniejszy się długość boku y prostokąta. Podobnie, jeśli długość boku x prostokąta zmniejszymy pięć razy, to długość boku y zwiększy się pięć razy.

Przykład 3.

Maciek i Kamil mieszkają w miejscowościach położonych przy tej samej szosie. Maciek często odwiedza Kamila. Pokonuje wówczas tę trasę w czasie 15 minut, jadąc na motocyklu z prędkością 48 km/h.

a) Obliczymy, ile czasu zajęłoby mu pokonanie tej drogi pieszo z prędkością 4 km/h.

b) Wyznaczymy średnią prędkość autokaru, który pokonuje tę trasę w czasie 12 minut.

W ruchu jednostajnym prostoliniowym drogę s przebytą w czasie t z prędkością v wyraża wzór $v \cdot t = s$. Droga jest wielkością stałą, zatem we wzorze

$v \cdot t = s$

wielkości v i t są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, zaś s jest współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej.

Ad a) Maciek drogę s pokonuje na motocyklu w czasie 15 minut, jadąc z prędkością 48 km/h. Po przeliczeniu czasu na godziny (15 min = 0,25 h) mamy:

$0{,}25 \cdot 48 = s$

Idąc pieszo, Maciek pokonałby tę drogę z prędkością 4 km/h. Zatem

$t \cdot 4 = s$, gdzie t oznacza czas (w godzinach) tej wędrówki.

Otrzymujemy zależność:

$t \cdot 4 = 0{,}25 \cdot 48$, stąd

$t = 3$

Maciek szedłby pieszo 3 godziny.

Ad b) Autokar pokonuje tę trasę w czasie krótszym od poprzednich, zatem prędkość autokaru powinna być większa niż prędkość motocykla. Podstawiamy teraz do wzoru w miejsce t czas jego przejazdu, przeliczony na godziny (12 min = 0,2 h):

$v \cdot 0{,}2 = 0{,}25 \cdot 48$, stąd

$v = 60$

Autokar jedzie z prędkością 60 km/h.

Przeanalizujmy otrzymane wyniki. Zauważ, że:

- na pokonanie trasy motocyklem z prędkością 48 km/h Maciek potrzebuje 15 minut, zaś idąc pieszo z prędkością 12 razy mniejszą, potrzebuje 12 razy więcej czasu, czyli

  $12 \cdot 15 \text{ min} = 180 \text{ min} = 3 \text{ h}$
- autobus pokonuje trasę w czasie 12 minut, czyli w czasie 1,25 razy krótszym niż Maciek na motocyklu, zatem jego prędkość jest 1,25 razy większa niż prędkość motoru i wynosi

  $1{,}25 \cdot 48 \text{ (km/h)} = 60 \text{ (km/h)}$

Kilkakrotny wzrost jednej zmiennej powoduje, że druga tyle samo razy się zmniejsza. Podobnie, jeśli jedna z nich kilkakrotnie maleje, druga tyle samo razy wzrasta.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Czterech robotników wykonało pewną pracę w czasie 12 godzin. Oblicz, ilu robotników (pracujących z taką samą wydajnością) wykona tę samą pracę w ciągu 5 godzin i 20 minut.
2. Pole trójkąta ABC o podstawie AB mającej długość 10 cm jest równe 40 cm^2. Jaką długość ma podstawa trójkąta o tym samym polu, którego wysokość opuszczona na tę podstawę jest:
   a) cztery razy dłuższa
   b) trzy razy krótsza od wysokości trójkąta ABC poprowadzonej na bok AB?
   Ile razy należy zwiększyć podstawę trójkąta, aby pole nie uległo zmianie, jeśli wysokość trójkąta będzie mieć 2 cm długości?

Funkcje wymierne

Definicja 1.

Funkcję $F(x)=\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$, gdzie $W_1(x)$, $W_2(x)$ są wielomianami i $W_2(x)\not\equiv 0$, nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem tych liczb x, które są pierwiastkami wielomianu $W_2(x)$, czyli $D=\boldsymbol{R}-\{x\colon W_2(x)=0\}$.

Jeśli st.$W_2(x)=0$, czyli $W_2(x)$ jest stałą różną od zera, to funkcja wymierna jest wielomianem, np.

$$F(x)=\frac{x^3-4x+6}{2},\quad \text{czyli}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}x^3-2x+3,\ \text{gdzie } D=\boldsymbol{R}.$$

Z kolei każdy wielomian jest funkcją wymierną, ponieważ można go przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów (jakich?).

Oto przykłady funkcji wymiernych:

a) $F(x)=x-1$, $D=\boldsymbol{R}$

b) $F(x)=\frac{x^4-4x+6}{x}$, $D=\boldsymbol{R}-\{0\}$

c) $F(x)=\frac{x^2+8}{x^2-1}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-1,1\}$

d) $F(x)=\frac{2}{x^2+5}$, $D=\boldsymbol{R}$

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji wymiernej $F(x)=\frac{2x-3}{(m^2-1)x^2+(m+1)x-5}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Dziedziną funkcji F jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian

$$W_2(x)=(m^2-1)x^2+(m+1)x-5$$

nie przyjmuje wartości równej zeru.

Rozpatrzymy dwa przypadki ze względu na wartość współczynnika przy x^2:

I. $m^2-1=0$

II. $m^2-1\neq 0$

Ad I. $m^2-1=0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)=0 \Leftrightarrow (m-1=0 \vee m+1=0) \Leftrightarrow (m=1 \vee m=-1)$

- Jeśli $m=1$, to $W_2(x)=2x-5$; wielomian $W_2(x)$ przyjmuje wartość równą zero wtedy, gdy $x=2{,}5$. Zatem parametr $m=1$ nie spełnia warunków zadania.

- Jeśli $m=-1$, to $W_2(x)=-5$; wielomian $W_2(x)$ nie przyjmuje wartości równej zero. Zatem parametr $m=-1$ spełnia warunki zadania.

Ad II. Jeśli $m^2-1\neq 0$, czyli $m\in \mathbf{R}-\{-1, 1\}$, to
$W_2(x)=(m^2-1)x^2+(m+1)x-5$
jest wielomianem stopnia drugiego i nie przyjmuje wartości równej zeru wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest ujemny.
Otrzymujemy:

$$(m+1)^2-4(m^2-1)(-5)<0$$
$$(m+1)^2+20(m-1)(m+1)<0$$
$$(m+1)(m+1+20m-20)<0$$
$$(m+1)(21m-19)<0$$

Zatem $m\in\left(-1, \frac{19}{21}\right)$.

Ostatecznie mamy

$$\left[m=-1 \;\vee\; m\in\left(-1, \frac{19}{21}\right)\right] \Leftrightarrow m\in\left\langle -1, \frac{19}{21}\right)$$

Dziedziną funkcji $F(x)=\dfrac{2x-3}{(m^2-1)x^2+(m+1)x-5}$ jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy, gdy $m\in\left\langle -1, \frac{19}{21}\right)$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wartość współczynnika a we wzorze funkcji $G(x)=\dfrac{x^3+ax-12}{x^2+5x+6}$, jeśli wiadomo, że liczba 4 jest miejscem zerowym funkcji. Obliczymy pozostałe miejsca zerowe funkcji G i podamy zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja G przyjmuje wartości ujemne.

Zapisujemy dziedzinę funkcji: $D=\mathbf{R}-\{-3, -2\}$. Wzór funkcji G możemy zapisać w postaci

$$G(x)=\frac{x^3+ax-12}{(x+2)(x+3)}$$

Liczba 4 jest miejscem zerowym funkcji, więc

$$G(4)=0$$

Otrzymujemy:

$$\frac{4^3+4a-12}{4^2+5\cdot 4+6}=0$$
$$\frac{4a+52}{42}=0, \quad \text{skąd}$$
$$4a+52=0, \text{ czyli } a=-13.$$

Jeśli $a = -13$, to miejscem zerowym funkcji wymiernej G jest liczba 4. Wyznaczamy pozostałe miejsca zerowe funkcji:

$$\frac{x^3-13x-12}{x^2+5x+6}=0, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R}-\{-3,-2\}$$

$$x^3-13x-12=0$$

$$x^3-x-12x-12=0$$

$$x\left(x^2-1\right)-12(x+1)=0$$

$$x(x-1)(x+1)-12(x+1)=0$$

$$(x+1)\left(x^2-x-12\right)=0$$

$$(x+1)(x-4)(x+3)=0$$

$$x+1=0 \ \vee \ x-4=0 \ \vee \ x+3=0$$

$$x=-1 \ \vee \ x=4 \ \vee \ x=-3$$

Liczba -3 nie należy do dziedziny funkcji.
Drugim miejscem zerowym funkcji wymiernej G (oprócz 4) jest liczba -1.

Teraz wyznaczamy zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja G przyjmuje wartości ujemne.

$$\frac{x^3-13x-12}{x^2+5x+6}<0, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R}-\{-3,-2\}$$

$$\frac{(x+1)(x-4)(x+3)}{(x+2)(x+3)}<0$$

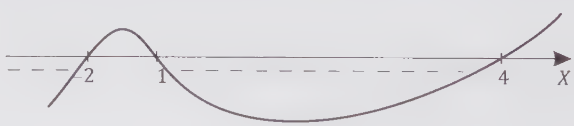
$$\frac{(x+1)(x-4)}{x+2}<0 \quad / \cdot (x+2)^2$$

$$(x+1)(x-4)(x+2)<0$$

Szkicujemy wykres funkcji wielomianowej

$$f(x)=(x+1)(x-4)(x+2)$$

Odczytujemy zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne w zbiorze $\boldsymbol{R}-\{-3,-2\}$. Otrzymujemy:



$$\begin{cases} x \in (-\infty,-2) \cup (-1,4) \\ x \in \boldsymbol{R}-\{-3,-2\} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty,-3) \cup (-3,-2) \cup (-1,4)$$

Współczynnik a we wzorze funkcji G jest równy -13; funkcja G ma jeszcze jedno miejsce zerowe: 1; funkcja ta przyjmuje wartości ujemne wtedy, gdy $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,-2) \cup (-1,4)$.

Przykład 3.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $F(x)=\frac{4x}{x^2+1}$.

Dziedziną funkcji F jest zbiór liczb rzeczywistych, bo dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$ wyrażenie x^2+1 przyjmuje wartość różną od zera. Szukamy zbioru wartości funkcji F, czyli zbioru tych elementów y należących do przeciwdziedziny, dla których istnieją takie argumenty x w dziedzinie funkcji, że y jest wartością funkcji F dla pewnego x.

Oznaczmy wartości funkcji literą y. Mamy:

$$y=\frac{4x}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad y(x^2+1)=4x \quad \Leftrightarrow \quad yx^2+y-4x=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad yx^2-4x+y=0$$

Otrzymaliśmy równanie z niewiadomą x (y jest parametrem).

- Jeśli $y=0$, to równanie jest liniowe i ma jedno rozwiązanie $x=0$; zatem istnieje taki argument należący do dziedziny funkcji $(0 \in D)$, że $y=F(0)=0$.

- Jeśli $y \neq 0$, to równanie
  $$yx^2-4x+y=0$$

jest równaniem kwadratowym i ma rozwiązania tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$. Stąd

$$\Delta \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16-4y^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \langle -2, 0) \cup (0, 2\rangle$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$[y=0 \ \vee \ y \in \langle -2, 0) \cup (0, 2\rangle] \Leftrightarrow y \ \langle -2, 2\rangle$$

Zbiorem wartości funkcji wymiernej $F(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ jest przedział $\langle -2, 2\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Jednym z miejsc zerowych funkcji $F(x)=\frac{x^3+ax^2-4x-24}{x+2}$ jest liczba -6.
   a) Oblicz współczynnik a.
   b) Wyznacz pozostałe miejsca zerowe funkcji F.
   c) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji F.
   d) Naszkicuj wykres funkcji F.

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji wymiernej $F(x)=\frac{x^2+2(m+1)x+9m-5}{x^2+2x-m}$ jest zbiór liczb rzeczywistych i funkcja F ma dwa miejsca zerowe różnych znaków.

3. Wyznacz zbiór wartości funkcji wymiernej $G(x)=\frac{6x}{x^2+1}$.

Funkcja homograficzna

W tym temacie naszkicujemy wykresy i omówimy własności funkcji wymiernej, która jest ilorazem wielomianów stopnia pierwszego (i która nie jest wielomianem).

Definicja 1.

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję wymierną $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$. Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\boldsymbol{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Funkcje homograficzne będziemy oznaczać wielkimi literami.

Oto przykłady funkcji homograficznych:

wzór funkcji homograficznej		wartości współczynników			
		a	b	c	d
$F(x) = \frac{3}{x}$,	$D = \boldsymbol{R} - \{0\}$	0	3	1	0
$G(x) = \frac{x}{x-2}$,	$D = \boldsymbol{R} - \{2\}$	1	0	1	–2
$H(x) = \frac{x-1}{4x}$,	$D = \boldsymbol{R} - \{0\}$	1	–1	4	0
$W(x) = \frac{-3x+4}{2x+7}$,	$D = \boldsymbol{R} - \left\{-3\frac{1}{2}\right\}$	–3	4	2	7

Przykład 1.

Sprawdzimy, czy funkcje określone wzorami:

a) $F(x) = \frac{4x+8}{x+2}$ b) $G(x) = \frac{3x-6}{4}$

są funkcjami homograficznymi.

Ad a) Dla funkcji F zachodzi równość $4 \cdot 2 - 1 \cdot 8 = 0$, więc nie jest to funkcja homograficzna. Jej wzór możemy zapisać w postaci

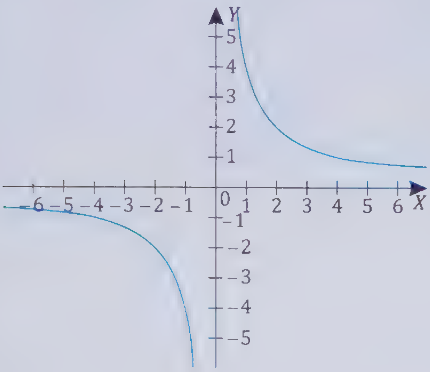
$$F(x) = 4, \quad D = \boldsymbol{R} - \{-2\}$$

Wykresem funkcji jest prosta o równaniu $y = 4$ bez jednego punktu $(-2, 4)$.

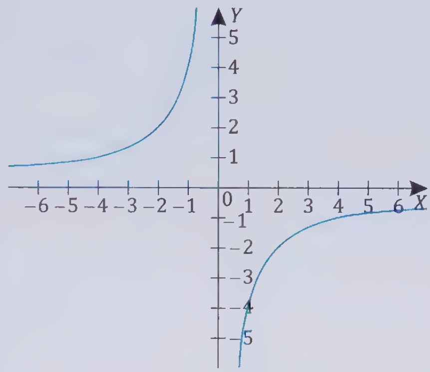
Ad b) Gdyby funkcja G była funkcją homograficzną, wówczas mianownik ułamka występującego we wzorze funkcji miałby postać $cx + d$, gdzie $c \neq 0$. Ale mianownik funkcji G jest równy 4, więc $c = 0$. Zatem funkcja G nie jest funkcją homograficzną. Funkcja G jest funkcją liniową. Jej wykresem jest prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$.

Wykresem każdej funkcji homograficznej jest hiperbola. Potrafisz już naszkicować wykres funkcji homograficznej $y = \frac{1}{x}$. Każda z dwóch części hiperboli jest jej gałęzią. Teraz naszkicujemy wykresy $F(x) = \frac{4}{x}$ i $G(x) = -\frac{4}{x}$, a następnie na ich podstawie omówimy własności funkcji homograficznej $y = \frac{a}{x}$ wtedy, gdy $a > 0$ oraz $a < 0$.

Wykres funkcji $y = \frac{4}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$



Wykres funkcji $y = -\frac{4}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$



Gałęzie hiperboli znajdują się w I i III ćwiartce układu współrzędnych, jeśli $a > 0$, albo w II i IV ćwiartce układu współrzędnych, jeśli $a < 0$. Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

- dziedziną funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$
- funkcja nie ma miejsc zerowych
- wykres funkcji nie przecina osi OY
- funkcja jest różnowartościowa
- funkcja nie przyjmuje ani wartości najmniejszej, ani największej

jeśli $a > 0$, to

- funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(0, +\infty)$, a ujemne w przedziale $(-\infty, 0)$
- funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

jeśli $a < 0$, to

- funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(-\infty, 0)$, a ujemne w przedziale $(0, +\infty)$
- funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

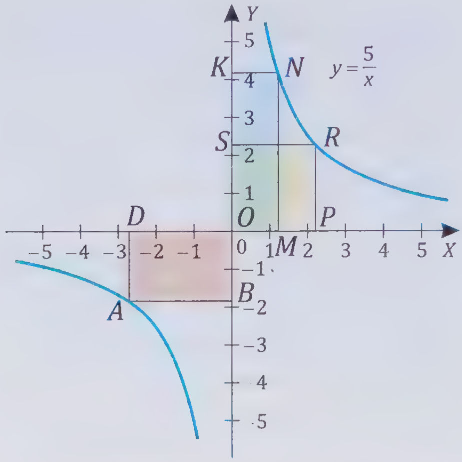
Zauważ, że ze wzoru $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$ i $x \neq 0$, otrzymujemy zależność $x \cdot y = a$, co znaczy, że iloczyn dowolnego argumentu x i odpowiadającej mu wartości funkcji y jest wielkością stałą, równą a. Zatem x i y to wielkości odwrotnie proporcjonalne. Dlatego funkcję homograficzną $y = \frac{a}{x}$ nazywamy także proporcjonalnością odwrotną.

Przykład 2.

Na poniższym rysunku przedstawione są: wykres proporcjonalności odwrotnej

$y = \frac{5}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{0\}$,

oraz prostokąty *ABOD*, *OPRS* oraz *OMNK*. Wykażemy, że pole każdego prostokąta przedstawionego na rysunku jest równe 5.



Na pewno zauważyłeś, że prostokąty na rysunku mają pewne charakterystyczne cechy:

- jeden z wierzchołków prostokąta umieszczony jest w początku układu współrzędnych
- jeden z wierzchołków należy do wykresu funkcji $y = \frac{5}{x}$
- dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych.

Rozważmy jeden z prostokątów, np. prostokąt *ABOD*.

Zauważ, że wierzchołek *A* tego prostokąta ma współrzędne $A\left(x, \frac{5}{x}\right)$, gdzie $x \neq 0$ (dlaczego?). Długości boków prostokąta możemy zapisać następująco:

$$|DO| = |x| \text{ oraz } |BO| = \left|\frac{5}{x}\right|, \text{ gdzie } x \neq 0.$$

Pole prostokąta *ABOD* jest równe $P = |DO| \cdot |BO| = |x| \cdot \left|\frac{5}{x}\right|$, czyli

$$P = \left|x \cdot \frac{5}{x}\right| = 5$$

Postępując podobnie, wykaż, że pozostałe przedstawione na rysunku prostokąty mają pole równe 5.

W kolejnym przykładzie zobaczymy, jak wygląda wykres funkcji homograficznej, która nie jest proporcjonalnością odwrotną.

Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji homograficznej $F(x) = \frac{4x+13}{x+2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$.
Następnie na podstawie wykresu omówimy własności tej funkcji.

Wykres funkcji F przecina osie układu współrzędnych w punktach

$\left(-3\frac{1}{4}, 0\right)$ oraz $\left(0, 6\frac{1}{2}\right)$.

Przekształcimy teraz wzór funkcji F do postaci $F(x) = \frac{k}{x-p} + q$, gdzie $k \neq 0$.

Zrobimy to na dwa sposoby.

<u>I sposób</u>
Podzielimy wielomian $(4x + 13)$ przez wielomian $(x + 2)$.

$$\begin{array}{l} \quad 4 \\ \hline (4x+13) : (x+2) \\ -4x - 8 \\ \hline \quad = 5 \end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy iloraz 4 i resztę 5.
Wynik zapisujemy w postaci

$$4 + \frac{5}{x+2}$$

Zatem wzór funkcji F możemy zapisać w postaci $F(x) = 4 + \frac{5}{x+2}$.

<u>II sposób</u>

$$F(x) = \frac{4x+13}{x+2}$$
$$F(x) = \frac{4(x+2)+5}{x+2}$$
$$F(x) = \frac{4(x+2)}{x+2} + \frac{5}{x+2}$$
$$F(x) = 4 + \frac{5}{x+2}$$

- mianownik ułamka $(x + 2)$ mnożymy przez współczynnik 4 i otrzymane wyrażenie uzupełniamy tak, aby otrzymać licznik ułamka równy $4x + 13$:

  $$4x + 13 = 4(x + 2) + 5$$
- ułamek zapisujemy w postaci sumy ułamków o takim samym mianowniku $x + 2$
- skracamy pierwszy składnik sumy

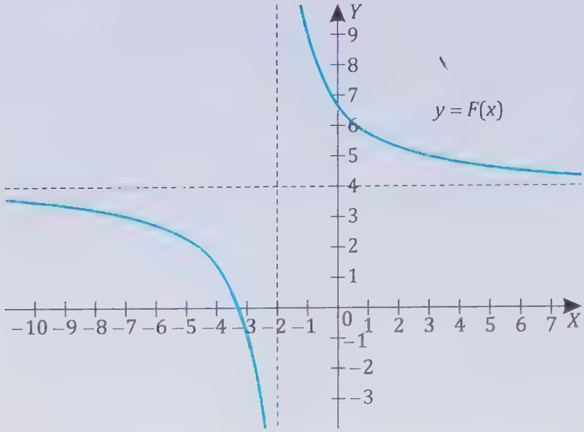
Wykres funkcji

$$F(x) = 4 + \frac{5}{x+2}$$

powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu proporcjonalności odwrotnej

$$y = \frac{5}{x} \text{ o wektor } \vec{u} = [-2, 4].$$

Wykres funkcji F ilustruje poniższy rysunek.



1. $D = \boldsymbol{R} - \{-2\}$
2. $ZW = \boldsymbol{R} - \{4\}$
3. Funkcja F ma jedno miejsce zerowe: $-3\frac{1}{4}$.
4. $F(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -3\frac{1}{4}\right) \cup (-2, +\infty)$

   $F(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-3\frac{1}{4}, -2\right)$
5. Funkcja F jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -2)$ oraz $(-2, +\infty)$.
6. Funkcja F nie przyjmuje wartości największej ani najmniejszej.
7. Wykres funkcji F jest symetryczny względem punktu $(-2, 4)$.

Zwróć uwagę, że proste o równaniach $y = 4$ oraz $x = -2$ wyznaczają dwa obszary, w których znajdują się gałęzie hiperboli. Równania tych prostych łatwo odczytać, znając współrzędne wektora $\vec{u}$.

Przykład 4.

Wykres funkcji $G(x) = \frac{2x - 7}{2x - 8}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{4\}$, powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = \frac{1}{2x}$ o wektor $\vec{u} = [a, b]$.

a) Wyznaczymy współrzędne wektora $\vec{u}$.
b) Wyznaczymy zbiór tych argumentów, dla których funkcja G przyjmuje wartości nie mniejsze niż -1.

Ad a) Przekształcimy wzór funkcji $G(x) = \frac{2x - 7}{2x - 8}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{4\}$.

Mamy:

$$G(x) = \frac{2x - 7}{2x - 8} = \frac{2x - 7}{2(x - 4)} = \frac{2(x - 4) + 1}{2(x - 4)} = 1 + \frac{1}{2(x - 4)}$$

Wykres funkcji $G(x) = \frac{2x-7}{2x-8}$ powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = \frac{1}{2x}$ o wektor $\vec{u} = [4, 1]$.

Ad b)

$$\left(\frac{2x-7}{2x-8} \geqslant -1 \wedge x \neq 4\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2x-7}{2x-8} + 1 \geqslant 0 \wedge x \neq 4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4x-15}{2x-8} \geqslant 0 \wedge x \neq 4\right) \Leftrightarrow [(4x-15)(2x-8) \geqslant 0 \wedge x \neq 4] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, 3\frac{3}{4}\right\rangle \cup (4, +\infty)$$

Funkcja $G(x) = \frac{2x-7}{2x-8}$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż -1 wtedy, gdy $x \in \left(-\infty, 3\frac{3}{4}\right\rangle \cup (4, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wśród poniższych funkcji znajdują się funkcje homograficzne. Wskaż je.

   a) $F(x) = \frac{x+5}{x-7}$ b) $F(x) = \frac{3x-4}{12x-16}$

   c) $F(x) = \frac{x^2+2x}{x}$ d) $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{x+3} - \sqrt{5}$

2. Naszkicuj wykres funkcji homograficznej F i omów jej własności, jeśli:

   a) $F(x) = -\frac{2}{x}$ b) $F(x) = \frac{4}{x+3}$

   c) $F(x) = \frac{-2x-3}{x}$ d) $F(x) = \frac{3x-4}{x-2}$

3. Wykres funkcji G powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji F o wektor $\vec{u}$. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{u}$, a następnie podaj przedziały monotoniczności funkcji G, jeśli:

   a) $F(x) = \frac{2}{x}$, $G(x) = \frac{-3x-13}{x+5}$ b) $F(x) = -\frac{3}{x}$, $G(x) = \frac{7x-17}{x-2}$

   c) $F(x) = \frac{2}{3x}$, $G(x) = \frac{3x+17}{3x+15}$ d) $F(x) = \frac{1}{4x}$, $G(x) = \frac{-8x+25}{4x-12}$

4. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja homograficzna $F(x) = \frac{3x-5}{x+3}$ przyjmuje wartości większe od 2.

Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

Przykład 1.

Wyznaczymy współczynnik a we wzorze funkcji homograficznej $F(x) = \frac{ax-3}{x+4}$, wiedząc, że dla argumentu $\frac{5}{7}$ funkcja F przyjmuje taką samą wartość jak funkcja homograficzna $G(x) = \frac{2x-1}{x-2}$.

Obliczamy wartość funkcji G dla argumentu $\frac{5}{7}$.

$$G\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{2\cdot\frac{5}{7}-1}{\frac{5}{7}-2} = -\frac{1}{3}$$

Funkcja F dla argumentu $\frac{5}{7}$ też przyjmuje wartość $-\frac{1}{3}$, więc otrzymujemy równanie:

$$\frac{a\cdot\frac{5}{7}-3}{\frac{5}{7}+4} = -\frac{1}{3},$$

z którego obliczamy a:

$$\frac{5}{7}\cdot a-3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}+\frac{28}{7}\right)$$

$$\frac{5}{7}\cdot a = \left(-\frac{11}{7}\right)+3$$

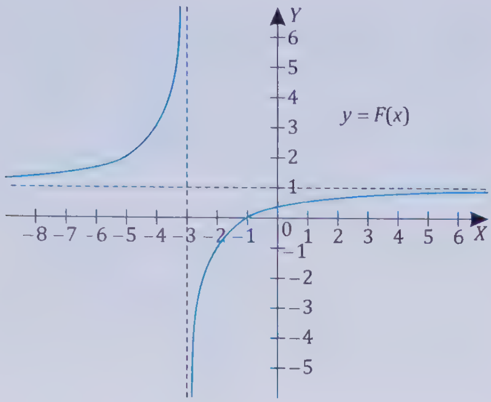
$$a = \frac{10}{7}\cdot\frac{7}{5}$$

$$a = 2$$

Współczynnik a jest równy 2. Funkcję F opisuje wzór $F(x) = \frac{2x-3}{x+4}$.

Przykład 2.

Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej $F(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$ i $ac - b \neq 0$. Korzystając z tego rysunku oraz wiedząc, że do wykresu funkcji F należy punkt $A(-5, 2)$, wyznaczymy współczynniki a, b, c.



Najpierw przekształcimy wzór funkcji $F(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ w następujący sposób:

$$F(x) = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c} = \frac{a(x+c)+(b-ac)}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c}$$

Wykres funkcji

$$F(x) = a + \frac{b-ac}{x+c}$$

powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$y = \dfrac{b-ac}{x}$ o wektor $\vec{u} = [-c, a]$

Z rysunku odczytujemy współrzędne wektora przesunięcia

$$\vec{u} = [-3, 1]$$

Stąd otrzymujemy: $c = 3$ i $a = 1$. Zatem wzór funkcji F ma postać: $F(x) = \dfrac{x+b}{x+3}$.

Wartość współczynnika b obliczymy, korzystając z informacji, że punkt $A(-5, 2)$ należy do wykresu funkcji F. Otrzymujemy:

$2 = \dfrac{-5+b}{-5+3}$, skąd $b - 5 = -4$, czyli

$b = 1$

Współczynniki we wzorze funkcji F mają wartości: $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$.

Przykład 3.

Z równania $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{y-2} = 1$ wyznaczymy y jako funkcję F zmiennej x, a następnie naszkicujemy wykres funkcji $y = F(x)$.

Równanie $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{y-2} = 1$ jest określone wtedy, gdy $x \neq -3$ i $y \neq 2$.

Wyznaczamy y z równania:

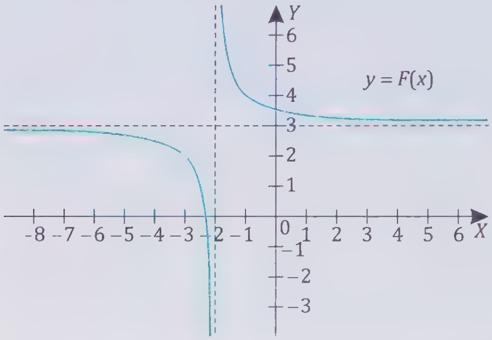
$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y-2}=1 \qquad \frac{1}{y-2}=1-\frac{1}{x+3} \qquad \frac{1}{y-2}=\frac{x+2}{x+3}$$

$$y-2=\frac{x+3}{x+2},\quad x\neq-2 \qquad y=\frac{x+3}{x+2}+2 \qquad y=\frac{3x+7}{x+2}$$

$$y=\frac{3(x+2)+1}{x+2} \qquad y=3+\frac{1}{x+2}$$

Funkcję F opisuje wzór $F(x)=3+\frac{1}{x+2}$. Dziedziną funkcji F jest zbiór $D=\boldsymbol{R}-\{-3,-2\}$.

Wykres funkcji F przedstawia poniższy rysunek.



Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których funkcja wymierna $F(x)=\frac{mx+12}{x+m}$, gdzie $x\neq -m$, jest funkcją homograficzną, rosnącą w przedziale $(-m,+\infty)$.

Funkcja $F(x)=\frac{mx+12}{x+m}$ jest funkcją homograficzną wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2-12\neq 0$, czyli

$$|m|\neq 2\sqrt{3}, \text{ skąd } m\in \boldsymbol{R}-\{-2\sqrt{3},\,2\sqrt{3}\}.$$

Przekształcimy wzór funkcji F.
Otrzymujemy:

$$F(x)=\frac{mx+12}{x+m}=\frac{m(x+m)-m^2+12}{x+m}=\frac{m(x+m)+\left(12-m^2\right)}{x+m}=$$

$$=m+\frac{12-m^2}{x+m},\ \text{gdzie } x\neq -m$$

Wykres funkcji $F(x)=\frac{mx+12}{x+m}$ powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{12-m^2}{x}$ o wektor $\vec{u}=[-m,m]$.

Z własności funkcji $y=\frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, wiemy, że jest ona rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$.
Zatem funkcja $F(x)=\frac{mx+12}{x+m}$ jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -m)$, $(-m, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $12-m^2<0$, czyli $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$.
Funkcja $F(x)=\frac{mx+12}{x+m}$, gdzie $x \neq -m$, jest funkcją homograficzną, rosnącą w przedziale $(-m, +\infty)$ wtedy, gdy $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru k ($k \in \mathbf{R} - \{-1\}$), dla których równanie $\left|\frac{2}{x+4}+3\right|=\frac{k-1}{k+1}$, gdzie $x \neq -4$, ma dwa rozwiązania ujemne.

Równanie rozwiążemy, wykorzystując wykresy odpowiednich funkcji. Niech

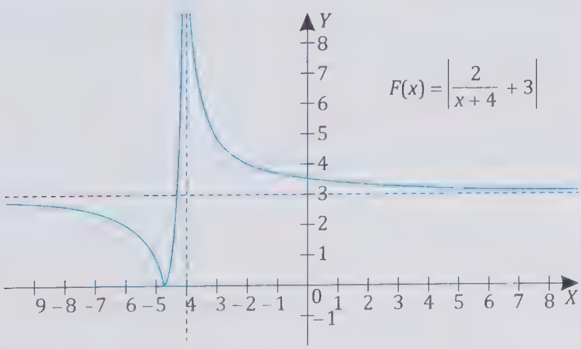
$$F(x)=\left|\frac{2}{x+4}+3\right|, \text{ gdzie } x \neq -4, \quad \text{i} \quad G(x)=\frac{k-1}{k+1}, \text{ gdzie } k \neq -1.$$

Równanie $F(x)=G(x)$ ma dwa rozwiązania ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy wykresy funkcji $y=F(x)$ i $y=G(x)$ mają dwa punkty wspólne, których odcięte są liczbami ujemnymi.
Wykres funkcji $F(x)=\left|\frac{2}{x+4}+3\right|$ powstaje w następujący sposób:

$$y=\frac{2}{x} \xrightarrow{T_{\vec{u}=[-4,3]}} y=\frac{2}{x+4}+3 \xrightarrow{y=|F_1(x)|} y=\left|\frac{2}{x+4}+3\right|$$

Do wykresu funkcji F należą punkty: $\left(0, 3\frac{1}{2}\right)$ i $\left(-4\frac{2}{3}, 0\right)$.

Funkcja $G(x)=\frac{k-1}{k+1}$, gdzie $k \neq -1$, jest funkcją stałą. Sytuację ilustruje poniższy rysunek.



Równanie $F(x)=G(x)$ ma dwa rozwiązania ujemne, gdy funkcja stała $G(x)=\frac{k-1}{k+1}$, gdzie $k \neq -1$, przyjmuje wartości ze zbioru $(0, 3) \cup \left(3\frac{1}{2}, +\infty\right)$, zatem:

$$\left[0 < \frac{k-1}{k+1} < 3 \ \vee \ \frac{k-1}{k+1} > \frac{7}{2}\right] \wedge \ k \neq -1 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \dfrac{k-1}{k+1} > 0 \\ \dfrac{k-1}{k+1} < 3 \\ k \neq -1 \end{cases} \vee \ \begin{cases} \dfrac{k-1}{k+1} > \dfrac{7}{2} \\ k \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(k+1) > 0 \\ (-2k-4)(k+1) < 0 \end{cases} \vee \ (-5k-9)(k+1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ k \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty) \end{cases} \vee \ k \in \left(-1\frac{4}{5}, -1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[k \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \ \vee \ k \in \left(-1\frac{4}{5}, -1\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ k \in (-\infty, -2) \cup \left(-1\frac{4}{5}, -1\right) \cup (1, +\infty)$$

Rozważane równanie ma dwa rozwiązania ujemne wtedy, gdy
$k \in (-\infty, -2) \cup \left(-1\frac{4}{5}, -1\right) \cup (1, +\infty)$.

Przykład 6.

Wyznaczymy trzy liczby pierwsze o tej własności, że ich iloczyn jest równy siedmiokrotnej sumie tych liczb.

Oznaczmy szukane liczby pierwsze przez p_1, p_2, p_3.
Liczby te spełniają warunek:
(*) $\quad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 7(p_1 + p_2 + p_3)$
Wyrażenie po lewej stronie znaku równości przedstawia liczbę w rozkładzie na czynniki pierwsze. Po prawej stronie występuje iloczyn liczby 7 przez sumę $p_1 + p_2 + p_3$.

Siódemka jest liczbą pierwszą, zatem jest jedną z liczb p_1, p_2, p_3. Możemy przyjąć, że $p_3 = 7$.
Wtedy równanie (*) sprowadza się do równania:
(**) $\quad p_1 \cdot p_2 = p_1 + p_2 + 7$
Wyznaczymy z powyższego równania p_2. Otrzymujemy:

$$p_1 \cdot p_2 - p_2 = p_1 + 7$$

$$p_2(p_1 - 1) = p_1 + 7$$

$p_2 = \dfrac{p_1 + 7}{p_1 - 1}$, gdzie $p_1 \neq 1$, bo p_1 jest liczbą pierwszą.

Przekształcamy otrzymane równanie w następujący sposób:

$p_2 = \dfrac{p_1 + 7}{p_1 - 1} = \dfrac{(p_1 - 1) + 8}{p_1 - 1} = 1 + \dfrac{8}{p_1 - 1}$, więc $p_2 = 1 + \dfrac{8}{p_1 - 1}$.

Liczba pierwsza p_2 jest sumą liczby naturalnej 1 i liczby $\frac{8}{p_1-1}$, więc $\frac{8}{p_1-1}$ jest też liczbą naturalną. Wobec tego (p_1-1) jest naturalnym dzielnikiem liczby 8. Naturalne dzielniki liczby 8 to 1, 2, 4 oraz 8, więc

$p_1-1=1 \lor p_1-1=2 \lor p_1-1=4 \lor p_1-1=8$, skąd

$p_1=2 \lor p_1=3 \lor p_1=5 \lor p_1=9$ (nie spełnia warunków zadania, bo 9 jest liczbą złożoną)

Otrzymujemy:

jeśli $p_1=2$, to $p_2=9$ (nie spełnia warunków zadania);

jeśli $p_1=3$, to $p_2=5$;

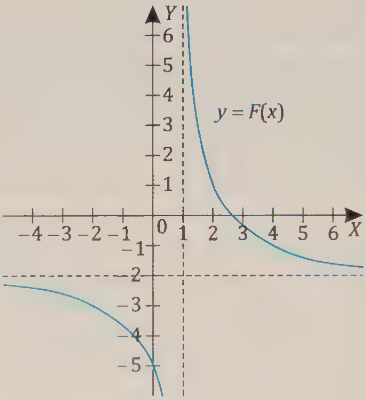
jeśli $p_1=5$, to $p_2=3$.

Warunki zadania spełniają trzy liczby pierwsze: 3, 5, 7.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Funkcję homograficzną opisuje wzór $F(x)=\frac{2+ax}{4x+1}$. Miejscem zerowym funkcji F jest liczba 2. Oblicz współczynnik a. Następnie wyznacz:
   a) współrzędne punktu wspólnego osi OY i wykresu funkcji F
   b) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja F przyjmuje wartości większe niż funkcja homograficzna $G(x)=\frac{2x+1}{1+4x}$.

2. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej $F(x)=\frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$ i $ac-b \neq 0$.
   Wyznacz współczynniki a, b, c, jeśli wiadomo, że miejscem zerowym funkcji F jest liczba 2,5.



3. Z równania $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}=1$, gdzie $x \neq -1$ i $y \neq -2$ wyznacz y jako funkcję F zmiennej x. Następnie naszkicuj wykres funkcji $y=|F(x)|$. Ustal dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) równanie $|F(x)|=m^2-1$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

4. Wyznacz dwie liczby naturalne dodatnie o tej własności, że ich iloczyn jest równy potrojonej sumie tych liczb.

7. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

Omówiliśmy już kilka rodzajów funkcji. Za każdym razem zwracaliśmy uwagę na dziedzinę funkcji. Dziedziną funkcji liniowej czy kwadratowej był zbiór liczb rzeczywistych, dziedziną funkcji $y = \frac{a}{x}$ – suma przedziałów $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Teraz poznasz własności funkcji, której dziedziną jest podzbiór zbioru liczb naturalnych.

Definicja 1.
Ciągiem skończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony podzbiór początkowych liczb naturalnych dodatnich.
Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Wartości zdefiniowanych powyżej funkcji nazywamy **wyrazami ciągu**.
Ciąg liczbowy to ciąg, którego wyrazy są liczbami rzeczywistymi.

Zwykle wyrazy ciągu zapisuje się inaczej niż wartości innych funkcji. Na przykład, jeśli rozważymy ciąg, który każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje liczbę dwa razy większą, to zamiast pisać:

$f(1) = 2 \qquad f(2) = 4 \qquad f(3) = 6 \qquad \dots \qquad f(n) = 2n \qquad \dots$

zwyczajowo piszemy:

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 4 \qquad a_3 = 6 \qquad \dots \qquad a_n = 2n \qquad \dots$

Wyraz n-ty ciągu „$a_n = 2n$" nazywa się wyrazem ogólnym. Pełni on taką rolę, jak wzór funkcji – umożliwia obliczenie dowolnego wyrazu ciągu.
Cały ciąg będziemy oznaczać (a_n) lub tak $(2, 4, 6, 8, \dots)$, czyli wypisując kolejne wyrazy ciągu w nawiasach okrągłych. Ciągi oznacza się też innymi literami, np. (b_n), (c_n).

Przykład 1.

1) Ciągiem skończonym (nieliczbowym) jest lista uczniów każdej klasy w dzienniku lekcyjnym. Kolejnym liczbom naturalnym przyporządkowane są nazwiska uczniów na ogół w porządku alfabetycznym.
2) Ciągiem skończonym (liczbowym) 9-wyrazowym jest numer telefonu komórkowego: 934 202 117. W tym wypadku kolejne wyrazy to:
   $a_1 = 9,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 2,\ a_5 = 0,\ a_6 = 2,\ a_7 = 1,\ a_8 = 1,\ a_9 = 7$

Wypisując kolejno wyrazy ciągu, należy zwrócić uwagę, że kolejność wypisywanych wyrazów jest istotna. Jest oczywiste, że dzwoniąc pod numer 934 202 117, połączymy się z innym abonentem niż dzwoniąc pod numer 934 202 171.

3) Ciągiem nieskończonym jest ciąg kolejnych liczb pierwszych:

$a_1 = 2,\quad a_2 = 3,\quad a_3 = 5,\quad a_4 = 7,\quad a_5 = 11,\quad a_6 = 13,\quad \ldots$

Przykład 2.

Obliczymy wyrazy $a_1, a_2, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2k}$ ciągu, którego wyraz ogólny ma postać

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

Aby obliczyć a_1, wstawiamy liczbę 1 w miejsce n w wyrażeniu $\frac{n^2}{n+1}$. Otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Podobnie obliczamy:

$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

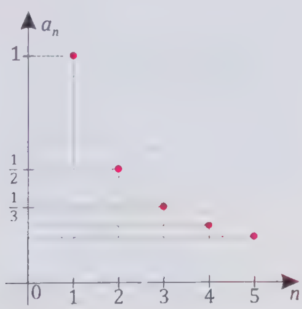
$$a_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)+1} = \frac{(n-1)^2}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$$

$$a_{2k} = \frac{(2k)^2}{2k+1} = \frac{4k^2}{2k+1}$$

Przykład 3.

Przedstawimy w układzie współrzędnych wykres ciągu 5-wyrazowego: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$



Jak pamiętasz z klasy pierwszej, wykres funkcji składa się z tylu punktów, ile jest elementów w dziedzinie. Dziedziną omawianego ciągu jest zbiór 5-elementowy:

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

zatem wykres składa się z pięciu punktów:

$$(1, 1)\ \left(2, \frac{1}{2}\right)\ \left(3, \frac{1}{3}\right)\ \left(4, \frac{1}{4}\right)\ \left(5, \frac{1}{5}\right)$$

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{4n^2+3n+6}{n}$, gdzie $n \in N_+$, które są liczbami naturalnymi.

Wyrażenie $\frac{4n^2+3n+6}{n}$ zapisujemy w postaci

$$4n+3+\frac{6}{n}$$

Wyrażenie $4n+3+\frac{6}{n}$ będzie przedstawiać liczbę naturalną tylko wtedy, gdy $\frac{6}{n}$ będzie liczbą naturalną, ponieważ $4n+3$ przedstawia liczbę naturalną dla dowolnego $n \in N$. Wyrażenie $\frac{6}{n}$ jest liczbą naturalną wtedy, gdy n jest dzielnikiem liczby 6.

Naturalne dzielniki liczby 6 to: 1, 2, 3, 6.

Zatem liczbami naturalnymi są następujące wyrazy ciągu (a_n):

$a_1 = 13 \qquad a_2 = 14 \qquad a_3 = 17 \qquad a_6 = 28$

Ważnym sposobem opisywania ciągów jest również podanie tzw. **wzoru rekurencyjnego**. Polega to na tym, że podajemy pierwszy wyraz ciągu (lub kilka początkowych wyrazów ciągu), a wzór na n-ty wyraz podajemy w zależności od wyrazów poprzednich. Oto przykład takiej definicji:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1}, \quad \text{jeśli} \quad n > 1 \end{cases}$$

Jeśli chcemy obliczyć np. czwarty wyraz ciągu, korzystając z powyższej definicji rekurencyjnej, to musimy wyznaczyć najpierw wyrazy o niższych numerach.

$a_2 = 3 \cdot a_1$, czyli $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_3 = 3 \cdot a_2$, czyli $a_3 = 3 \cdot 6 = 18$ i na koniec

$a_4 = 3 \cdot a_3$, czyli $a_4 = 3 \cdot 18 = 54$

Leonardo Fibonacci, włoski matematyk, uczył się od arabskiego mistrza, później sporo podróżował, m.in. po Grecji, Sycylii, Egipcie i Syrii. Wiele informacji z dziedziny arytmetyki i algebry zebranych wówczas zawarł w dziele pt. *Liber Abaci* (*Księga rachunków*) spisanym w 1202 r. Znajduje się tam takie oto zadanie: Ile par królików może spłodzić jedna para w ciągu roku, jeśli: (1) każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca, a ta nowa para staje się płodna w następnym miesiącu; (2) króliki nie zdychają?

Miesiąc	Liczba par dorosłych	Liczba par młodych	Całkowita liczba par
1.	0	1	1
2.	1	0	1
3.	1	1	2
4.	2	1	3
5.	3	2	5
6.	5	3	8
...	...	...	...

Łatwo zauważyć, że w miesiącu n liczba par jest sumą dwóch składników: liczby par z poprzedniego miesiąca (czyli liczby par dorosłych w miesiącu n) i liczby par młodych (czyli liczby par dorosłych w miesiącu $n-1$, tzn. liczby wszystkich par w miesiącu $n-2$). Jeśli więc oznaczymy przez f_n liczbę wszystkich królików w miesiącu n, to otrzymujemy:

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (jeśli $n > 2$).

Przyjmując dodatkowo, że: $f_1 = 1, f_2 = 1$, możemy podać definicję rekurencyjną ciągu nazwanego ciągiem Fibonacciego. Oto wyrazy tego ciągu:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

Liczby Fibonacciego (czyli wyrazy powyższego ciągu) mają wiele ciekawych własności. Zadziwiające jest jednak to, że liczby te „odnajdujemy" w przyrodzie. Na przykład liczby płatków niektórych kwiatów wyrażają się liczbami Fibonacciego: irys ma 3 płatki, jaskier – 5, ostróżka – 8, cyneraria – 13, aster – 21, babka zwyczajna – 34, stokrotki – 55 i 89. Układy liści na gałązkach różnych gatunków roślin wskazują na związek z liczbami Fibonacciego. Pestki w tarczy słonecznika układają się wzdłuż spiral. Liczby nasion w tych spiralach to też liczby Fibonacciego. Podobnie upakowane są nasiona w szyszkach.

Wyraz ogólny ciągu Fibonacciego jest następujący:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Wzór może wydawać się zaskakujący. Zauważ, że w tym wzorze występuje liczba wyrażająca złoty podział.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dany jest wyraz ogólny ciągu nieskończonego (a_n): $a_n = -n^2 + 3n$. Oblicz a_8, a_{101}, a_{n+1}.
2. Sporządź wykres ciągu (a_n), jeśli:
   a) $a_n = -n + 3$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   b) $a_n = (n-2)(n-5)$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
3. Które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), gdzie $a_n = 1 - \frac{6}{n+1}$, są liczbami całkowitymi? Podaj ich wartości.
4. Wyznacz wszystkie ujemne wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), jeśli:
   a) $a_n = 2n - 8$
   b) $a_n = n^2 - 8n + 15$
5. Niech f_n będzie n-tym wyrazem ciągu Fibonacciego. Wykaż, że jeśli f_n jest liczbą parzystą, to $3|n$.

Monotoniczność ciągów

Przypomnijmy: funkcja f jest rosnąca w zbiorze A wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 należących do zbioru A z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$ (co należy rozumieć, że wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji). Tę definicję można wprost zastosować do ciągów nieskończonych, uwzględniając, że dziedziną ciągu jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Wówczas definicja ta przyjmie następującą postać:

(*) Ciąg (a_n) jest rosnący wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych dodatnich k, l z nierówności $k < l$ wynika nierówność $a_k < a_l$.

Okazuje się jednak, że w przypadku ciągu rosnącego wystarczy zażądać, by dla dowolnej pary kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} spełniona była nierówność $a_n < a_{n+1}$. Otrzymamy wówczas definicję równoważną definicji (*) z prostszym do sprawdzenia warunkiem.

Definicja 1.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Możemy zapisać krócej:

ciąg (a_n) jest rosnący $\underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{n \in N_+} a_{n+1} > a_n$

Potocznie możemy powiedzieć, że ciąg (a_n) jest rosnący wtedy, gdy każdy wyraz ciągu (a_n) (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego.

Analogicznie definiujemy ciąg malejący i ciąg stały.

Definicja 2.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Możemy zapisać krócej:

ciąg (a_n) jest malejący $\underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{n \in N_+} a_{n+1} < a_n$

Mówimy, że ciąg (a_n) jest malejący wtedy, gdy każdy wyraz ciągu (a_n) (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego.

Definicja 3.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n$.

Możemy zapisać krócej:

$$\text{ciąg } (a_n) \text{ jest stały} \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{n \in N_+} a_{n+1} = a_n$$

Przykład 1.

Zbadamy, czy ciąg nieskończony, którego wyraz ogólny ma postać $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, jest rosnący, czy malejący.

Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ (dla dowolnego $n \geqslant 1$). Otrzymujemy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} =$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$
$$= \frac{2n^2 + n + 2n + 1 - (2n^2 + 3n)}{(2n+3)(2n+1)} =$$
$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

Uzasadnienie:
- $2n + 3 > 0$ — dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n
- $2n + 1 > 0$ — dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n
- $(2n + 3)(2n + 1) > 0$ — iloczyn liczb dodatnich jest liczbą dodatnią
- $\dfrac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$ — iloraz liczb dodatnich jest liczbą dodatnią.

Pokazaliśmy, że $\bigwedge_{n \in N_+} a_{n+1} - a_n > 0$, czyli $\bigwedge_{n \in N_+} a_{n+1} > a_n$, a to znaczy, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Przykład 2.

Zbadamy, czy ciąg nieskończony o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 9n$ jest rosnący, czy malejący.

Badamy znak różnicy

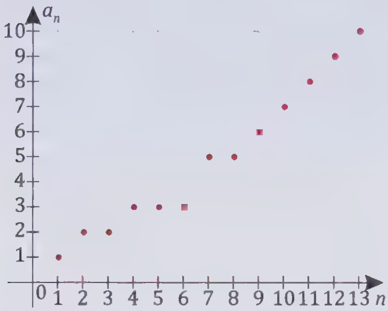
$$a_{n+1} - a_n = \left[(n+1)^2 - 9(n+1)\right] - \left(n^2 - 9n\right) =$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 9n - 9 - n^2 + 9n =$$
$$= 2n - 8$$

Okazuje się, że jeśli $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, to $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$,
natomiast jeśli $n \in \{5, 6, 7, \ldots\}$, to $a_{n+1} - a_n > 0$.
Tak więc ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący w zbiorze liczb naturalnych dodatnich. Możemy też powiedzieć, że począwszy od wyrazu piątego, ciąg (a_n) jest rosnący.

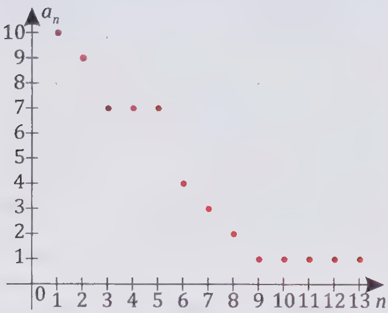
Definicja 4.

1) Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem niemalejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \geqslant a_n$.
2) Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem nierosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \leqslant a_n$.

Oczywiście, każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym i każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym. Poniżej pokazujemy przykład ciągu niemalejącego, który nie jest rosnący, i przykład ciągu nierosnącego, który nie jest malejący.



Ciągiem niemalejącym jest ciąg:
(1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 7, 8,...)
Jego wykres przedstawia rysunek obok.



Ciągiem nierosnącym jest ciąg:
(10, 9, 7, 7, 7, 4, 3, 2, 1, 1, 1,...)
Wykres tego ciągu przedstawia rysunek obok.

Ciągi niemalejące i nierosnące nazywamy **ciągami monotonicznymi**.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Sprawdź, czy nieskończony ciąg (a_n) jest monotoniczny, jeśli:
   a) $a_n = (-1)^{2n+1}$ b) $a_n = (n+4)^2$ c) $a_n = (-1)^n \cdot n$
2. Wykaż, że nieskończony ciąg (a_n) jest rosnący, jeśli:
   a) $a_n = n^2$ b) $a_n = 4n - 3$ c) $a_n = -\frac{3}{n}$
3. Wykaż, że nieskończony ciąg (a_n) jest malejący, jeśli:
   a) $a_n = 5 - n$ b) $a_n = \frac{2}{n+1}$ c) $a_n = \frac{1-2n}{n}$

Ciąg arytmetyczny

Definicja 1.
Niech (a_n) będzie ciągiem co najmniej trójwyrazowym.
Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg (a_n), w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego tej samej liczby r. Liczbę tę nazywamy **różnicą ciągu arytmetycznego**.

Możemy zapisać krócej:

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \text{ jeśli } n > 1 \end{cases}$

Przykład 1.

Obliczymy kilka kolejnych wyrazów ciągu określonego następująco:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2, \text{ jeśli } n > 1 \end{cases}$$

Obliczamy:

$$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 7 + 2 = 9$$
$$a_5 = a_4 + 2 = 9 + 2 = 11$$
$$a_6 = a_5 + 2 = 11 + 2 = 13$$
$$a_7 = a_6 + 2 = 13 + 2 = 15$$

Zbadajmy monotoniczność ciągu arytmetycznego.
Zauważ, że

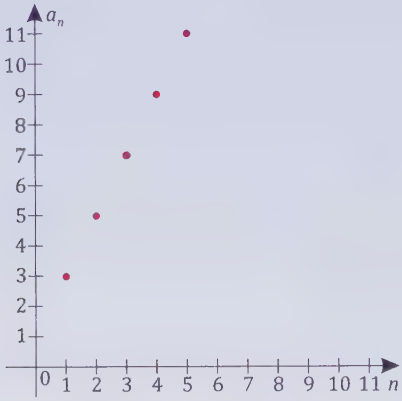
$$\bigwedge_{\substack{n \in N \\ n > 1}} (a_n - a_{n-1} = r),$$

zatem, jeśli:

$r > 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym
$r < 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym
$r = 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

Na rysunkach przedstawione są wykresy ciągu rosnącego, malejącego i stałego.

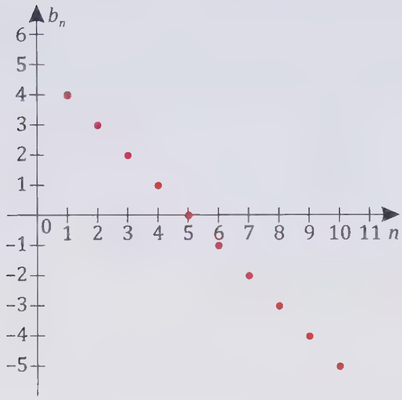
a)



$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2, \text{ jeśli } n > 1 \end{cases}$$

ciąg rosnący, $r = 2$

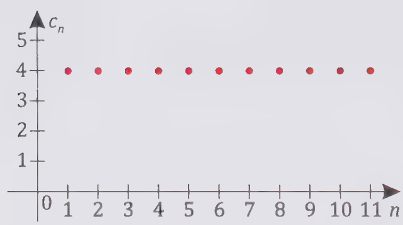
b)



$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_n = b_{n-1} - 1, \text{ jeśli } n > 1 \end{cases}$$

ciąg malejący, $r = -1$

c)



$$\begin{cases} c_1 = 4 \\ c_n = c_{n-1}, \text{ jeśli } n > 1 \end{cases}$$

ciąg stały, $r = 0$

Spróbujemy teraz wyznaczyć wyraz ogólny ciągu arytmetycznego. Mamy:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r$

$a_6 = a_5 + r = a_1 + 5r$

$a_7 = a_6 + r = a_1 + 6r$

....

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

Przykład 2.

Dany jest 5-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 3$ i $a_5 = 5{,}4$. Wyznaczymy a_2, a_3, a_4.

Zapiszmy kolejne wyrazy ciągu:

3	a_2	a_3	a_4	5,4
a_1	$a_1 + r$	$a_1 + 2r$	$a_1 + 3r$	$a_1 + 4r$

Z jednej strony mamy:

$$a_5 - a_1 = 5{,}4 - 3 = 2{,}4,$$

z drugiej zaś:

$$a_5 - a_1 = a_1 + 4r - a_1 = 4r,$$

więc

$$4r = 2{,}4 \quad /:4$$

$$r = 0{,}6$$

Ostatecznie otrzymujemy: $a_2 = 3{,}6 \quad a_3 = 4{,}2 \quad a_4 = 4{,}8$.

Przykład 3.

Rozważmy ciąg liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. Są to liczby: 1, 4, 7, 10, ... Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 1 i różnicy 3. Sprawdzimy, czy liczba 1048 wystąpi w tym ciągu, a jeśli tak, to na którym miejscu.

Zauważ, że:

$$1048 = 1 + 349\cdot 3,$$

zatem liczba 1048 jest 350. wyrazem omawianego ciągu.

Przykład 4.

Suma siódmego i trzynastego wyrazu ciągu arytmetycznego jest równa 14, a suma wyrazu dziesiątego i dwudziestego drugiego wynosi 10. Obliczymy pierwszy wyraz a_1 tego ciągu i różnicę r.

Zgodnie z twierdzeniem 1. otrzymujemy:

$$a_7 = a_1 + 6r \qquad a_{13} = a_1 + 12r \qquad a_{10} = a_1 + 9r \qquad a_{22} = a_1 + 21r$$

Z warunków zadania wynika, że

$$\begin{cases} a_7 + a_{13} = 14 \\ a_{10} + a_{22} = 10, \end{cases}$$

zatem

$$\begin{cases}(a_1+6r)+(a_1+12r)=14\\(a_1+9r)+(a_1+21r)=10\end{cases}$$

$$-\begin{cases}2a_1+18r=14\\2a_1+30r=10\end{cases}$$

$$-12r=4 \quad /:(-12)$$

$$\begin{cases}r=-\dfrac{1}{3}\\a_1=10\end{cases}$$

Pierwszy wyraz ciągu jest równy 10, a różnica $-\frac{1}{3}$.

Zobaczymy teraz, jaka jest zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
Wypiszmy wzory na trzy kolejne wyrazy a_{n-1}, a_n, a_{n+1} takiego ciągu:

$$a_{n-1}=a_1+(n-2)\cdot r$$
$$a_n=a_1+(n-1)\cdot r$$
$$a_{n+1}=a_1+n\cdot r$$

Jeśli zsumujemy pierwszy i ostatni z wypisanych wyrazów, to wówczas otrzymamy:

$$\begin{aligned}a_{n-1}+a_{n+1}&=a_1+(n-2)\cdot r+a_1+n\cdot r=\\&=2a_1+(2n-2)\cdot r=\\&=2\cdot[a_1+(n-1)\cdot r]=2\cdot a_n,\end{aligned}$$

zatem

$$(*)\quad a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\quad n>1$$

Pokazaliśmy, że w ciągu arytmetycznym każdy wyraz, oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego), jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.
Łatwo też pokazać, że jeśli ciąg (a_n) spełnia warunek (*), to jest ciągiem arytmetycznym. Otrzymujemy bowiem:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad /\cdot 2$$

$$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$$

$$a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n,\quad n>1$$

Różnice między kolejnymi wyrazami są równe, zatem rzeczywiście ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu oprócz wyrazu pierwszego (i ewentualnie ostatniego) jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.

Przykład 5.

Wyznaczymy te wartości naturalne k, dla których liczby $3k^2-2k+3$, k^2-k+1, $-2k^2+k+5$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Zgodnie z twierdzeniem 2. możemy zapisać wyraz środkowy jako średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych, skąd otrzymujemy równanie:

$$k^2-k+1=\frac{(3k^2-2k+3)+(-2k^2+k+5)}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2k^2-2k+2=k^2-k+8$$

$$k^2-k-6=0$$

$$\Delta=25 \qquad \sqrt{\Delta}=5$$

$$k=-2 \quad \vee \quad k=3$$

$$-2 \notin N \qquad 3 \in N$$

Jeśli $k=3$, to podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny: $(24, 7, -10)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1=-7 \\ a_n=a_{n-1}+3, \text{ jeśli } n>1 \end{cases}$$
   a) Wyznacz siódmy wyraz tego ciągu.
   b) Czy jest to ciąg malejący, rosnący czy stały?
2. Wykaż, że ciąg (a_n), gdzie $a_n=-4n+17$, jest ciągiem arytmetycznym.
3. Dany jest pierwszy wyraz i różnica ciągu arytmetycznego. Napisz wzór rekurencyjny ciągu. Wyznacz wyraz ogólny ciągu.
   a) $a_1=-3 \quad r=4$
   b) $a_1=3 \quad r_1=-2$
4. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę r ciągu arytmetycznego, którego $a_{13}=0$, $a_{29}=8$.
5. Wyznacz wartość k, dla której ciąg $(k^2+k, 2k, k-3)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wypisz wyrazy tego ciągu.
6. Między liczby 3 oraz -9 wstaw cztery liczby tak, aby wraz z danymi liczbami (w podanej kolejności) tworzyły ciąg arytmetyczny.
7. Wykaż, że ciąg $\left(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}, \frac{2}{3-\sqrt{7}}\right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Niech (a_n) oznacza dowolny ciąg liczbowy. Symbolem S_n oznaczymy sumę n początkowych wyrazów tego ciągu. Tak więc:

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

....

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$

Dodatkowo przyjmujemy, że $S_1 = a_1$ i $S_0 = 0$.

Przykład 1.

Rozważmy ciąg (a_n), w którym $a_n = 10 - 3n$. Wyznaczymy S_4.

Wyznaczamy cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n).

$a_1 = 10 - 3 \cdot 1 = 7 \quad a_2 = 10 - 3 \cdot 2 = 4 \quad a_3 = 10 - 3 \cdot 3 = 1 \quad a_4 = 10 - 3 \cdot 4 = -2$

Następnie obliczamy sumę S_4.

$S_4 = 7 + 4 + 1 + (-2) = 10$

O wybitnym matematyku niemieckim Karolu Gaussie (XVIII/XIX w.) opowiada się czasem anegdotę, że jako uczeń znalazł metodę szybkiego sumowania liczb naturalnych od 1 do 40, czym zwrócił na siebie uwagę nauczyciela. Takie szybkie sumowanie nie jest zbyt skomplikowane. Wypisujemy liczby od 1 do 40 – raz w porządku rosnącym, a raz w porządku malejącym.

1	2	3	4	5	...	38	39	40
40	39	38	37	36	...	3	2	1
41	41	41	41	41	...	41	41	41

Łatwo zauważyć, że w każdej kolumnie suma liczb (nad kreską) jest równa 41, kolumn jest 40, każda liczba (od 1 do 40) jest liczona dwukrotnie, zatem

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 38 + 39 + 40 = \frac{41 \cdot 40}{2} = 820$$

Postępując podobnie jak w powyższym przykładzie, wyznaczymy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n).

Wypisujemy kolejno wyrazy od a_1 do a_n, a pod spodem kolejno wyrazy od a_n do a_1.

a_1	$a_1 + r$	$a_1 + 2r$	...	$a_1 + (n-2)r$	$a_1 + (n-1)r$
$a_1 + (n-1)r$	$a_1 + (n-2)r$	$a_1 + (n-3)r$	...	$a_1 + r$	a_1
$2a_1 + (n-1)r$	$2a_1 + (n-1)r$	$2a_1 + (n-1)r$	...	$2a_1 + (n-1)r$	$2a_1 + (n-1)r$

W każdej kolumnie suma wyrażeń (nad kreską) jest równa $2a_1 + (n-1)r$. Zauważ, że
$$2a_1 + (n-1)r = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = a_1 + a_n$$
Ponadto kolumn jest n, każdy wyraz ciągu jest liczony dwukrotnie, więc
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2},$$
co możemy zapisać krócej
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}, \quad n \geqslant 1$$
Otrzymany wynik zapiszemy w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 1.
Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n,$$
dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

Przykład 2.

Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych.

Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 10$ i ostatnim wyrazie $a_{90} = 99$. Mamy więc:
$$S_{90} = \frac{10 + 99}{2}\cdot 90 = 4905$$

Przykład 3.

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{2}n$.
Wykażemy, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Wystarczy wykazać, że różnice między kolejnymi wyrazami ciągu są jednakowe. Zauważmy, że $S_0 = 0$ oraz że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n zachodzą równości:
$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad \text{oraz}$$
$$a_n = S_n - S_{n-1},$$
zatem
$$a_{n+1} = \frac{3}{4}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) - \left(\frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{2}n\right) = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$$
$$a_n = \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{2}n - \left[\frac{3}{4}(n-1)^2 - \frac{1}{2}(n-1)\right] = \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}n - \frac{5}{4}$$

Obliczamy różnicę:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2}n + \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{2}n - \frac{5}{4}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n różnica ta jest stała, więc rzeczywiście ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 4.

O ciągu arytmetycznym wiemy, że: $a_1 = -28$, $r = 3$, $S_n = 5840$. Obliczymy n.

Uwzględniając, że $a_n = a_1 + (n-1)r$, otrzymujemy wzór na sumę:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n, \quad \text{czyli}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Z tego wzoru otrzymujemy równanie z niewiadomą n ($n \in \boldsymbol{N}_+$)

$$5840 = \frac{2 \cdot (-28) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n, \quad \text{skąd}$$

$$3n^2 - 59n - 11680 = 0$$

$$\Delta = 143641 \qquad \sqrt{\Delta} = 379$$

$$n_1 = \frac{-320}{6}, \quad \frac{-320}{6} \notin \boldsymbol{N}_+ \qquad n_2 = 73, \; 73 \in \boldsymbol{N}_+$$

Liczba 5840 to suma 73 początkowych wyrazów tego ciągu.

Przykład 5.

Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym. Dla pewnych liczb naturalnych dodatnich m oraz k, $m \neq k$, mamy: $a_m = \frac{2}{k}$ oraz $a_k = \frac{2}{m}$. Wyznaczymy sumę $m \cdot k$ początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Najpierw wyznaczymy wyraz a_1 oraz różnicę r ciągu (a_n) – w zależności od m oraz k. W tym celu dwukrotnie stosujemy twierdzenie 1. ze str. 349. Prowadzi to nas do układu równań

$$\begin{cases} a_1 + (k-1) \cdot r = \dfrac{2}{m} \\ a_1 + (m-1) \cdot r = \dfrac{2}{k} \end{cases}$$

Ten układ równań rozwiążemy, stosując metodę wyznacznikową. Otrzymujemy:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m - 1 - (k-1) = m - k$$

Z założenia wiemy, że $m \neq k$, więc wyznacznik główny W jest różny od zera. Układ równań ma zatem jedno rozwiązanie. Obliczmy dalej:

$$W_{a_1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{m} & k-1 \\ \frac{2}{k} & m-1 \end{vmatrix} = \frac{2(m-1)}{m} - \frac{2(k-1)}{k} = \frac{2mk - 2k - 2mk + 2m}{mk} = \frac{2(m-k)}{mk}$$

$$W_r = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{m} \\ 1 & \frac{2}{k} \end{vmatrix} = \frac{2}{k} - \frac{2}{m} = \frac{2(m-k)}{mk}$$

Mamy

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{W_{a_1}}{W} \\ r = \dfrac{W_r}{W} \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{mk} \\ r = \dfrac{2}{mk} \end{cases}$$

Obliczamy wyraz a_{mk}. Ponownie korzystamy z twierdzenia 1. ze str. 349.

$$a_{mk} = a_1 + (mk-1)r, \quad \text{czyli} \quad a_{mk} = \frac{2}{mk} + \frac{(mk-1)\cdot 2}{mk} = \frac{2mk}{mk} = 2.$$

Wyznaczamy S_{mk} sumę $m \cdot k$ początkowych wyrazów ciągu (a_n). Korzystamy z twierdzenia 1. z tego tematu.

$$S_{mk} = \frac{a_1 + a_{mk}}{2} \cdot mk, \quad \text{więc} \quad S_{mk} = \frac{\frac{2}{mk} + 2}{2} \cdot mk = 1 + mk.$$

Suma $m \cdot k$ początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa $1 + mk$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:
   a) $a_1 = 2 \quad r = -3$
   b) $a_n = 8n + 5$

2. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych:
   a) nieparzystych
   b) podzielnych przez 3
   c) których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 1.

3. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2$.
   a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
   b) Wyznacz ogólny wyraz a_n.
   c) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

4. W skończonym ciągu arytmetycznym wyraz pierwszy jest równy -10, a różnica tego ciągu wynosi $2\frac{1}{3}$. Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa 775, wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.

Ciąg geometryczny

Definicja 1.
Niech (a_n) będzie ciągiem co najmniej trójwyrazowym.
Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg (a_n), w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q. Liczbę tę nazywamy **ilorazem ciągu geometrycznego**.

Możemy zapisać krócej:

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ jeśli } n > 1 \end{cases}$

Przykłady ciągów geometrycznych:

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, \frac{81}{2}, \ldots\right)$ $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = 3$ ciąg rosnący

b) $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ $a_1 = 2$ $q = \frac{1}{2}$ ciąg malejący

c) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{27}{2}, -\frac{81}{2}, \ldots\right)$ $a_1 = -\frac{1}{2}$ $q = 3$ ciąg malejący

d) $\left(-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots\right)$ $a_1 = -2$ $q = \frac{1}{2}$ ciąg rosnący

e) $(6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \ldots)$ $a_1 = 6$ $q = 1$ ciąg stały

f) $(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ $a_1 = 2$ $q = 0$ ciąg stały od drugiego wyrazu

g) $\left(8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$ $a_1 = 8$ $q = -\frac{1}{2}$ ciąg niemonotoniczny

Następujące twierdzenie dotyczy monotoniczności ciągu geometrycznego.

Twierdzenie 1.
Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Jeśli:
1) $a_1 > 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym;
2) $a_1 > 0$ i $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym;
3) $a_1 < 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym;
4) $a_1 < 0$ i $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym;
5) $q = 1$ lub $q = 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem stałym; jeśli $q = 0$ — od drugiego wyrazu;
6) $a_1 \neq 0$ i $q < 0$, to ciąg (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym.

Dla przykładu udowodnimy punkt 1):
Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, w którym
(*) $a_1 > 0$ i $q > 1$

Z definicji ciągu geometrycznego wiemy, że

(**) $a_n = a_{n-1} \cdot q$, jeśli $n > 1$

Uwzględniając warunki (*) i (**), możemy stwierdzić, że

(***) $a_n > 0$, jeśli $n \geqslant 1$

Zatem

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q > 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$$

Korzystając z warunku (***), otrzymujemy

$a_n > a_{n-1}$, jeśli $n > 1$,

co dowodzi, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Ustalimy wyraz ogólny ciągu geometrycznego. Wypiszemy kilka kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), uzależniając je od wyrazu pierwszego a_1 i ilorazu q.

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$
$$a_6 = a_5 \cdot q = a_1 \cdot q^5$$
$$a_7 = a_6 \cdot q = a_1 \cdot q^6$$
....

Można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, $q \neq 0$, to

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

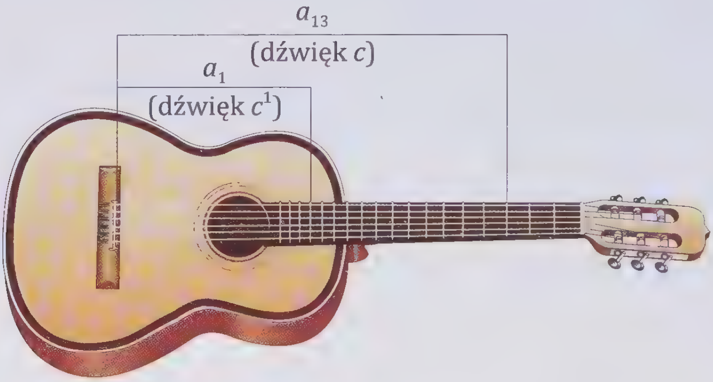
Pojęcie ciągu geometrycznego ma pewien związek z muzyką.

Pitagoras (VI w. przed Chrystusem) i jego uczniowie oprócz dociekań czysto matematycznych prowadzili też badania związane z akustyką. W badaniach tych posługiwali się specjalnym jednostrunowym instrumentem, tzw. monochordem. Pitagorejczycy odkryli, że miłe dla ucha, zgodne współbrzmienie dwóch dźwięków występuje wtedy, gdy stosunek długości strun wyraża się stosunkiem małych liczb naturalnych. Podstawowym interwałem (odległością muzyczną) była oktawa wyrażająca się stosunkiem 2 : 1. Oznaczało to, że jeśli strunę skróci się o połowę, to otrzyma się dźwięk o oktawę wyższy.

Oktawa składa się z 12 półtonów. Okazało się, że nie można tak podzielić oktawy, aby odpowiednie interwały wyrażały się liczbami naturalnymi oraz by stosunki odpowiadające tym interwałom zachowywały się w kolejnych tonacjach. Półtony nie były więc równe. Powodowało to pewne niedogodności związane ze strojeniem instrumentów. Chcąc temu zaradzić, w pierwszej połowie XVIII wieku wprowadzono system dźwiękowy, w którym oktawa została podzielona na 12 równych półtonów (tzw. system dźwiękowy równomiernie temperowany). Oznacza to m.in., że częstotliwości kolejnych dźwięków (różniących się o półton) tworzą ciąg geometryczny.

Przykład 1.

Rysunek przedstawia gitarę klasyczną.



Na szyjce gitary są rozmieszczone nierównomiernie metalowe progi. Grający przyciska palcami struny, które opierając się na progach, skracają się lub wydłużają, przez co można osiągnąć wyższy lub niższy dźwięk. Sąsiednie progi rozmieszczone są tak, że odpowiadają zmianie dźwięku o jeden półton.

Niech ciąg

$(a_1, a_2, ..., a_{13})$

będzie ciągiem długości strun, które odpowiadają kolejnym dźwiękom od c^1 do c. Jest to ciąg geometryczny. Obliczymy iloraz tego ciągu.

$a_{13} = 2a_1,$ ponieważ odległość między c^1 i c jest równa oktawie

$a_{13} = a_1 \cdot q^{12},$ $q > 0$

Zatem

$2a_1 = a_1 \cdot q^{12}$

$2 = q^{12}$

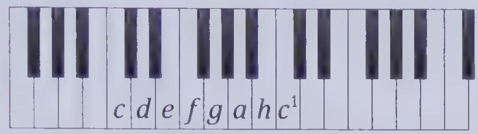
$q = \sqrt[12]{2} \lor q = -\sqrt[12]{2}$

(liczba $-\sqrt[12]{2}$ nie spełnia założenia $q > 0$, bo $-\sqrt[12]{2} < 0$).

Iloraz ciągu jest równy $\sqrt[12]{2}$.

Przykład 2.

Częstotliwość dźwięku a wynosi 220 Hz. Obliczymy, ile wynosi (w przybliżeniu) częstotliwość dźwięku c^1.



Częstotliwości kolejnych dźwięków tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\sqrt[12]{2}$. Odległość między dźwiękami a i c^1 wynosi 3 półtony (tercja mała). Jest więc:

$$220 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^3 \approx 261{,}63 \text{ (Hz)}$$

Częstotliwość dźwięku c^1 jest równa (w przybliżeniu) 261,63 Hz.

Przykład 3.

Wyznaczymy pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że

$$a_6 - a_4 = 1512 \ \text{ i } \ a_5 + a_4 = 756$$

Korzystając z twierdzenia 2., możemy zapisać:

$$a_6 = a_1q^5$$
$$a_5 = a_1q^4$$
$$a_4 = a_1q^3,$$

gdzie q jest ilorazem ciągu geometrycznego (a_n).
Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1q^5 - a_1q^3 = 1512 \\ a_1q^4 + a_1q^3 = 756 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q^3\left(q^2-1\right) = 1512 \\ a_1q^3(q+1) = 756 \end{cases}$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnice kwadratów, zapisujemy wyrażenie $q^2 - 1$ w postaci iloczynu $(q+1)(q-1)$.

$$\begin{cases} a_1q^3(q+1)(q-1) = 1512 \\ a_1q^3(q+1) = 756 \end{cases}, \qquad \text{zatem}$$

$$\begin{cases} 756(q-1) = 1512 \quad /:756 \\ a_1q^3(q+1) = 756 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q-1 = 2 \\ a_1q^3(q+1) = 756 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 3 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 7, a iloraz tego ciągu jest równy 3.

Ustalimy teraz, jaka jest zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
Wypiszmy wzory na trzy kolejne wyrazy a_{n-1}, a_n, a_{n+1} takiego ciągu:

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

Mnożymy wyrazy a_{n-1} i a_{n+1}. Otrzymujemy:

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot a_1 \cdot q^n = (a_1 \cdot q^{n-1})^2 = a_n^2$$

(*) $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, jeśli $n > 1$

W ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego) jest równy iloczynowi wyrazu poprzedniego i następnego. Równość (*) można zapisać też w postaci

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \quad \text{jeśli } n > 1$$

Tak więc w ciągu geometrycznym wartość bezwzględna każdego wyrazu oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego) jest równa średniej geometrycznej wyrazu poprzedniego i następnego.

Jeśli z kolei ciąg (a_n) spełnia warunek

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}, \quad \text{jeśli } n > 1$$

i każdy wyraz ciągu jest różny od zera, to ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, ponieważ ilorazy kolejnych wyrazów ciągu są równe:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad \text{jeśli } n > 1$$

Prawdziwe jest więc twierdzenie 3.

Twierdzenie 3.
Niech (a_n) oznacza ciąg o wyrazach różnych od zera.
Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu ciągu (a_n), oprócz wyrazu pierwszego (i ewentualnie ostatniego), jest równy iloczynowi wyrazu poprzedniego i następnego.

Przykład 4.

Niech ciąg (a_1, a_2, a_3, a_4) będzie ciągiem geometrycznym o wyrazach ujemnych. Wykażemy, że wówczas

$$a_1 + a_4 \leqslant a_2 + a_3$$

Dany ciąg jest ciągiem geometrycznym, więc możemy przyjąć oznaczenia:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3, \qquad \text{gdzie } q \text{ jest ilorazem ciągu geometrycznego } (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Rozważmy wyrażenie $a_1 + a_4 - a_2 - a_3$. Mamy:

$$a_1 + a_4 - a_2 - a_3 =$$
$$= a_1 + a_1q^3 - a_1q - a_1q^2 =$$
$$= a_1(1-q) - a_1q^2(1-q) =$$
$$= a_1(1-q)[1-q^2] =$$
$$= a_1(1-q)(1-q)(1+q) =$$
$$= a_1(1-q)^2(1+q)$$

W przekształceniach wykorzystaliśmy: grupowanie wyrazów (pierwszy i trzeci oraz drugi i czwarty), wyłączanie przed nawias (trzy razy), a także wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Przeanalizujmy, jakie znaki mają czynniki w otrzymanym iloczynie.
Z założenia wszystkie wyrazy ciągu są ujemne, więc

$$a_1 < 0$$

Kwadrat dowolnego wyrażenia jest nieujemny, więc

$$(1-q)^2 \geqslant 0$$

Z założenia wszystkie wyrazy ciągu są ujemne, więc iloraz q tego ciągu jest dodatni (gdyby iloraz był ujemny – wyrazy ciągu byłyby na przemian ujemne i dodatnie), czyli

$$q > 0,$$

więc również

$$1 + q > 0$$

Iloczyn trzech wyrażeń: ujemnego, nieujemnego i dodatniego jest niedodatni, czyli

$$a_1(1-q)^2(1+q) \leqslant 0,$$

a to znaczy, że

$$a_1 + a_4 - a_2 - a_3 \leqslant 0, \text{ czyli}$$

$$a_1 + a_4 \leqslant a_2 + a_3,$$ co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Zbadaj, które z danych ciągów są geometryczne:

   a) $a_n = (-0{,}1)^n$ b) $b_n = \begin{cases} -1, \text{ jeśli } n = 2k, k \in \mathbf{N}_+ \\ 1, \text{ jeśli } n = 2k+1, k \in \mathbf{N} \end{cases}$ c) $c_n = \dfrac{2^n}{n}$

2. Wyznacz wyraz ogólny ciągu geometrycznego określonego wzorem rekurencyjnym:

   a) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = (-3) \cdot b_{n-1} \end{cases}$ c) $\begin{cases} c_1 = -4{,}5 \\ c_{n+1} = -c_n \end{cases}$

3. Wyznacz ogólny wyraz ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że $a_5 = -1$, $a_8 = -\dfrac{8}{27}$. Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Wyznaczymy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n). Oznaczmy

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n, \quad \text{czyli}$$

(1) $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$

Załóżmy, że $q = 1$. Wówczas równość (1) przyjmuje postać:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ składników}} = n \cdot a_1$$

Załóżmy teraz, że $q \neq 1$, czyli $q - 1 \neq 0$. Dla takich wartości q wyrażenie $\frac{1-q}{1-q}$ jest określone i równe 1. Wówczas

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} =$$

$$= \frac{1-q}{1-q}\left(a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q}(1-q)\left(a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}\right.$$

$$\left. - a_1q - a_1q^2 - a_1q^3 - \ldots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} - a_1q^n\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(a_1 - a_1q^n\right) = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem:

a) $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, o ile $q \neq 1$, dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n;

b) $S_n = n \cdot a_1$, o ile $q = 1$, dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

Przykład 1.

Legenda głosi, że twórca szachów zażyczył sobie od władcy Indii (któremu gra bardzo się spodobała) następującej zapłaty. Poprosił, by dano mu tyle zboża, ile zmieści się na szachownicy, jeśli ziarna będzie się układać według następującej zasady: na pierwszym polu 1 ziarno zboża, na drugim 2 ziarna, na trzecim 4 ziarna, na czwartym 8 ziaren i tak dalej, tzn. na każdym następnym polu dwa razy więcej ziaren niż na poprzednim – aż do ostatniego pola.

Szachownica ma 64 pola, więc na ostatnim polu powinno znaleźć się 2^{63} ziaren. Liczby kolejnych ziaren tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 1 i ilorazie 2, zatem cała zapłata powinna wynieść:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Taka ilość zboża przekracza roczne zbiory z całej naszej planety.

Przykład 2.

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) suma pierwszych czterech wyrazów jest równa 40, a suma czterech następnych jest równa 3240. Wyznaczymy iloraz q i pierwszy wyraz ciągu a_1.

Ciąg nie jest stały, zatem zgodnie z ostatnim twierdzeniem otrzymujemy:

$$(*)\quad a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 40$$

Cztery kolejne wyrazy tworzą ciąg geometryczny

$$\left(a_1q^4, a_1q^5, a_1q^6, a_1q^7\right)$$

o ilorazie q i pierwszym wyrazie a_1q^4. Zatem suma wyrazów takiego ciągu wynosi:

$$(**)\quad a_1q^4 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 3240$$

Przekształcamy równanie (*) do postaci

$$\frac{1-q^4}{1-q} = \frac{40}{a_1} \qquad (a_1 \neq 0)$$

i po uwzględnieniu równania (**) otrzymujemy:

$$a_1q^4 \cdot \frac{40}{a_1} = 3240$$

$$q^4 = 81$$

$$q = 3 \;\vee\; q = -3$$

Jeśli $q = -3$, to ciąg nie jest monotoniczny, pozostaje więc $q = 3$. Łatwo teraz obliczyć, że $a_1 = 1$.

Przykład 3.

Wykażemy, że liczba $\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cyfr}}8\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ cyfr}}1$ jest kwadratem liczby naturalnej dla dowolnej liczby $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Zauważmy, że

jeśli $n = 1$, to liczba ma postać 9801 oraz $9801 = 99^2$

jeśli $n = 2$, to liczba ma postać 998001 oraz $998001 = 999^2$

jeśli $n = 3$, to liczba ma postać 99980001 oraz $99980001 = 9999^2$.

Zanim rozwiążemy zadanie, rozważmy liczbę 99980001. Możemy zapisać:

$$99980001 = \underbrace{9 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5}_{\text{suma wyrazów ciągu geometrycznego}} + 8 \cdot 10^4 + 1 =$$

$$= 9 \cdot 10^5 \cdot \frac{1 - 10^3}{1 - 10} + 8 \cdot 10^4 + 1 =$$

$$= 10^5(10^3 - 1) + 8 \cdot 10^4 + 1 =$$

$$= 10^8 \underline{- 10^5 + 8 \cdot 10^4} + 1 =$$

$$= 10^8 - 10^4(10 - 8) + 1 =$$

$$= 10^8 - 2 \cdot 10^4 + 1 = (10^4)^2 - 2 \cdot 10^4 \cdot 1 + 1^2 = (10^4 - 1)^2$$

W przekształceniach zastosowaliśmy wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego (aby ułatwić obliczenia – jako pierwszy wyraz potraktowaliśmy wyraz najmniejszy, czyli $9 \cdot 10^5$). Z podkreślonych składników wyłączyliśmy przed nawias liczbę (10^4), a na końcu skorzystaliśmy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

Przystępujemy do rozwiązania zadania. W rozwiązaniu zastosujemy analogiczne przekształcenia do tych przedstawionych powyżej. Liczba $\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cyfr}}8\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ cyfr}}1$ ma $(2n + 2)$ cyfry. Zatem

$$\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cyfr}}8\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ cyfr}}1 = \underbrace{9 \cdot 10^{2n+1} + 9 \cdot 10^{2n} + \ldots + 9 \cdot 10^{n+2}}_{\text{suma } n \text{ wyrazów ciągu geometrycznego}} + 8 \cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= 9 \cdot 10^{n+2} \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} + 8 \cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= 10^{n+2}(10^n - 1) + 8 \cdot 10^{n+1} + 1 =$$

$$= 10^{2n+2} \underline{- 10^{n+2} + 8 \cdot 10^{n+1}} + 1 =$$

$$= 10^{2n+2} - 10^{n+1}(10 - 8) + 1 =$$

$$= 10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+1} + 1 = (10^{n+1})^2 - 2 \cdot 10^{n+1} + 1^2 = (10^{n+1} - 1)^2$$

Ostatecznie otrzymaliśmy

$$\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cyfr}}8\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ cyfr}}1 = (10^{n+1} - 1)^2$$

Liczba $(10^{n+1} - 1)$ jest liczbą naturalną dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n, co kończy rozwiązanie zadania.

Rozważmy dwa ciągi, gdzie $x > 0$:

(1) $1, \quad 1 + x, \quad (1 + x)^2, \quad (1 + x)^3, \quad (1 + x)^4, \quad (1 + x)^5, \ldots$

(2) $1, \quad 1 + x, \quad 1 + 2x, \quad 1 + 3x, \quad 1 + 4x, \quad 1 + 5x, \ldots$

Pierwsze dwa wyrazy każdego z ciągów są jednakowe, pierwszy ciąg jest ciągiem geometrycznym, drugi – ciągiem arytmetycznym. Pokażemy, że wyrazy ciągu geometrycznego – począwszy od trzeciego wyrazu, są większe od odpowiednich wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykład 4.

Wykażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n > 1+nx,$$

gdzie x jest dowolną liczbą dodatnią.

Założenie: $n \in \mathbf{N}, n > 1, x > 0$

Teza: $(1+x)^n > 1+nx$

Dowód: Rozważmy sumę n wyrazów ciągu geometrycznego (1). Otrzymujemy

$$(*) \quad \frac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)} = 1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{n-1}$$

W sumie po prawej stronie każdy składnik – począwszy od drugiego – jest większy od 1, pierwszy składnik jest równy 1, więc cała suma jest większa od n,

$$1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{n-1} > n,$$

a zatem lewa strona równości (*) też jest większa od n

$$\frac{(1+x)^n-1}{x} > n \quad / \cdot x \quad \text{(z założenia } x > 0\text{)}$$

$$(1+x)^n-1 > nx$$

i ostatecznie

$$(1+x)^n > 1+nx,$$ co kończy dowód

Nierówność $(1+x)^n > 1+nx$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $x > 0$, nazywa się **nierównością Bernoulliego**.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Pchła Szachrajka w pierwszym skoku pokonała odległość 1 m, w drugim skoku pół metra i w każdym następnym skoku połowę długości skoku poprzedniego. Czy pokona odległość 2 m w dziesięciu skokach? Wykonaj odpowiednie obliczenia.
2. Dany jest malejący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 27$, $a_3 = 12$.
   a) Wyznacz iloraz tego ciągu.
   b) Zapisz ogólny wyraz a_n tego ciągu, jeśli $n \geqslant 1$.
   c) Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
3. Dany jest ciąg geometryczny (a_n), którego $a_1 = 8$, $q = 1{,}5$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać liczbę 65?

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

W tym temacie omówimy zagadnienia związane z oprocentowaniem lokat pieniężnych i kredytów. Istnieją dwa sposoby oprocentowania lokat pieniężnych: procent prosty i procent składany.
Procent prosty to rodzaj oprocentowania polegający na tym, że odsetki doliczane do złożonego wkładu nie podlegają dalszemu oprocentowaniu.
Procent składany to rodzaj oprocentowania polegający na tym, że odsetki doliczane do złożonego wkładu dolicza się do lokaty i oprocentowuje w następnym okresie.
Doliczanie odsetek do lokaty nazywa się **kapitalizacją odsetek**, a czas, po którym dolicza się odsetki – **okresem kapitalizacji**.

Przykład 1.

W banku założono lokatę w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa jest równa 6%, oprocentowanie jest proste. Oprocentowanie naliczane jest po każdym roku trwania lokaty. Ile pieniędzy wypłaci bank po wygaśnięciu lokaty, jeśli lokata została założona na:
a) rok
b) dwa lata
c) pięć lat?
Zakładamy, ze przez cały okres trwania lokaty oprocentowanie nie zmieni się.

Ad a) Po roku odsetki od wkładu będą równe

$$6\% \cdot 10\,000 = 600 \text{ (zł)},$$

zatem bank wypłaci kwotę

$$10\,000 + 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 0{,}06) = 10\,600 \text{ (zł)}$$

Ad b) Odsetki po każdym roku – przy oprocentowaniu prostym – są takie same, zatem po drugim roku również będą wynosić 600 zł, więc po dwóch latach bank wypłaci

$$10\,000 + 2 \cdot 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 2 \cdot 0{,}06) = 11\,200 \text{ (zł)}$$

Ad c) Łatwo stwierdzić, że po pięciu latach bank wypłaci

$$10\,000 + 5 \cdot 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 5 \cdot 0{,}06) = 13\,000 \text{ (zł)}$$

Jeśli przyjmiemy następujące oznaczenia:

K_0 – początkowa wartość kapitału
p – oprocentowanie (proste) w jednym okresie rozliczeniowym
n – liczba okresów rozliczeniowych
K_n – wartość kapitału po n okresach rozliczeniowych,

to wówczas

$$K_n = K_0(1 + n \cdot p)$$

UWAGA: Jeśli bank byłby zobowiązany do odliczenia podatku – np. w wysokości 18% – od dochodów kapitałowych, wówczas wypłaciłby tylko 82% odsetek. I tak na przykład po pięciu latach bank zamiast 13 tysięcy wypłaciłby

$$10\,000 + 5 \cdot 6\% \cdot 10\,000 \cdot 82\% = 10\,000(1 + 5 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}82) = 12\,460 \text{ (zł)}$$

Przykład 2.

W banku założono lokatę w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa jest równa 6%, oprocentowanie jest złożone (składane). Kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku. Ile pieniędzy wypłaci bank po wygaśnięciu lokaty, jeśli lokata została założona na:

a) rok
b) dwa lata
c) pięć lat?

Zakładamy, że przez cały okres trwania lokaty oprocentowanie nie zmieni się.

Ad a) Po roku odsetki od wkładu będą równe

$$6\% \cdot 10\,000 = 600 \text{ (zł)},$$

zatem bank wypłaci kwotę

$$10\,000 + 6\% \cdot 10\,000 = 10\,000(1 + 0{,}06) = 10\,600 \text{ (zł)}$$

Ad b) W drugim roku kwota, od której liczony jest procent, wynosi 10 600 zł. Mamy zatem

$$\underbrace{10000 \cdot (1 + 0{,}06)}_{\substack{\text{kwota oprocentowana} \\ \text{w drugim roku}}} + \underbrace{10000 \cdot (1 + 0{,}06) \cdot 0{,}06}_{\text{odsetki po drugim roku}} =$$

$$= 10\,000 \cdot (1 + 0{,}06)(1 + 0{,}06) =$$

$$= 10\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^2 = 11\,236 \text{ (zł)}$$

Ad c) Postępując podobnie jak w punkcie b), otrzymamy, że po pięciu latach bank wypłaci

$$10\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^5 \approx 13\,382{,}26 \text{ (zł)}$$

UWAGA: Jeśli bank byłby zobowiązany do odliczenia podatku – np. w wysokości 18% – od dochodów kapitałowych, wówczas <u>po każdym okresie kapitalizacji</u> doliczałby do oprocentowywanej kwoty tylko 82% odsetek. I tak na przykład po pięciu latach bank zamiast 13 382,26 zł wypłaciłby

$$10\,000 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 0{,}82)^5 \approx 12\,714{,}27 \text{ (zł)}$$

Przykład 3.

W banku założono lokatę w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa jest równa 6%, oprocentowanie jest złożone. Kapitalizacja odsetek następuje co miesiąc. Ile pieniędzy wypłaci bank po wygaśnięciu lokaty, jeśli lokata została założona na dwa lata?

Kapitalizacja odbywa się co miesiąc, więc co miesiąc kwota oprocentowywana wzrasta o

$$\frac{1}{12} \cdot 6\% = 0{,}5\%$$

Po pierwszym miesiącu na koncie będzie

$$10\,000 \cdot (1 + 0{,}005) \text{ (zł)}$$

Po drugim miesiącu

$$10\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^2 \text{ (zł)}$$

W ciągu dwóch lat odsetki będą kapitalizowane 24 razy. Zatem po dwóch latach bank wypłaci

$$10\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^{24} \approx 11\,271{,}60 \text{ (zł)}$$

Zauważ, że – przy takiej samej rocznej stopie procentowej – na wysokość odsetek wpływa sposób oprocentowania i częstość kapitalizacji odsetek. Im dłuższy jest czas trwania inwestycji, tym bardziej widoczne są różnice.
W tabeli poniżej przedstawiony został zysk, jaki można otrzymać, inwestując 10 000 zł na 6% w skali roku, przy miesięcznej kapitalizacji odsetek, w zależności od rodzaju oprocentowania i czasu trwania inwestycji (pominięto podatek od dochodów kapitałowych, kwoty podane są z dokładnością do pełnych złotówek).

	Czas trwania inwestycji					
	5 lat	10 lat	15 lat	20 lat	25 lat	30 lat
Zysk z inwestycji na **procent prosty**	3000 zł	6000 zł	9000 zł	12 000 zł	15 000 zł	18 000 zł
Zysk z inwestycji na **procent składany**	3488 zł	8194 zł	14 541 zł	23 102 zł	34 650 zł	50 225 zł

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli zainwestujemy kwotę K_0 na okres n lat, na procent składany, przy rocznej stopie procentowej r oraz m równych okresach kapitalizacji w ciągu roku, to po tym czasie otrzymamy kwotę K, gdzie

$$K = K_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Jeśli dodatkowo potrącony będzie podatek p-procentowy od dochodów kapitałowych, to

$$K = K_0\left[1 + \frac{r}{m} \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)\right]^{m \cdot n}$$

W kolejnych przykładach pominiemy podatek od dochodów kapitałowych.

Przykład 4.

Bank oferuje lokatę terminową z kwartalną kapitalizacją odsetek i roczną, stałą stopą procentową równą 5,2%. Jaki kapitał należy zainwestować, aby po trzech latach otrzymać 5000 zł?

Przyjmując oznaczenia jak w ostatnim twierdzeniu, otrzymujemy:

$K = 5000 \quad r = 0{,}052 \quad m = 4 \quad n = 3$

Szukamy kwoty K_0.

$$K_0 = \frac{K}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

$$K_0 = \frac{5000}{(1 + 0{,}013)^{12}} \approx 4282{,}10 \text{ (zł)}$$

Wystarczy zainwestować 4283 zł.

Przykład 5.

Pewna firma sprzedaje zestawy kina domowego za gotówkę po 9500 zł lub na raty, w czterech ratach płatnych co trzy miesiące po 2500 zł (pierwsza rata po trzech miesiącach od daty zakupu). Pan Nowicki w chwili podjęcia decyzji o zakupie takiego zestawu ma na koncie 9500 zł. W banku stałe oprocentowanie wynosi 12% w skali roku, kapitalizacja odsetek jest kwartalna. Jaka forma zakupu – za gotówkę czy na raty – jest korzystniejsza dla pana Nowickiego?

Jeśli pan Nowicki dokonałby zakupu za gotówkę, to musiałby wydać wszystkie pieniądze będące na koncie. Obliczymy teraz, jaką kwotę na koncie musiałby mieć pan Nowicki (w chwili podjęcia decyzji o zakupie zestawu kina domowego), aby móc spłacić cztery kwartalne raty.
Aby zapłacić pierwszą ratę, pan Nowicki musi mieć na koncie w chwili zakupu

$$\frac{2500}{(1 + 0{,}03)} \text{ (zł)}$$

(Porównaj z ostatnim przykładem. Taką kwotę należy zainwestować na kwartał, aby po doliczeniu odsetek $\left(3\% = \frac{1}{4} \cdot 12\%\right)$ otrzymać 2500 zł).

Chcąc zapłacić drugą ratę (po kolejnych trzech miesiącach), pan Nowicki musi mieć na koncie (w chwili zakupu) dodatkowo

$$\frac{2500}{(1 + 0{,}03)^2} \text{ (zł)}$$

Na trzecią ratę potrzeba $\frac{2500}{(1 + 0{,}03)^3}$ (zł) i na czwartą $\frac{2500}{(1 + 0{,}03)^4}$ (zł).

Tak więc, aby kupić zestaw kina domowego na raty, pan Nowicki powinien mieć na koncie w chwili zakupu

$$\frac{2500}{(1+0{,}03)}+\frac{2500}{(1+0{,}03)^2}+\frac{2500}{(1+0{,}03)^3}+\frac{2500}{(1+0{,}03)^4}\ \text{(zł)}$$

Wartość powyższej sumy możemy wyznaczyć, stosując wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego lub obliczyć przybliżone wartości każdego ze składników. Wówczas otrzymamy 9292,75 zł.
Korzystniejszą formą zakupu jest więc zakup ratalny. Przy kupnie za gotówkę, pan Nowicki musiałby wydać wszystkie pieniądze będące na koncie.
Okazuje się, że przy zakupie ratalnym po spłacie czterech rat panu Nowickiemu zostałoby na koncie ok. 232 zł (spróbuj to obliczyć).

Przykład 6.

Pewna firma wzięła w banku kredyt w wysokości 100 000 zł. Kredyt ma być spłacony w czterech równych ratach, po pierwszym, drugim, trzecim i czwartym kwartale. Oprocentowanie kredytu wynosi 20% w skali roku. Obliczymy wysokość raty i łączną wartość zapłaconych odsetek.

Oznaczmy wartość raty kredytu przez K_R. Każda rata składa się z części kredytu i odsetek od tej części kredytu. Obliczymy, jaką część kredytu zawierają kolejne raty spłacane przez firmę.
Pierwsza rata spłacona zostanie po pierwszym kwartale. Zatem do części kredytu spłaconej w pierwszej racie odsetki będą naliczane tylko przez jeden kwartał w wysokości 5% $\left(=\frac{1}{4}\cdot 20\%\right)$. Tak więc w pierwszej racie część kredytu stanowi

$$\frac{K_R}{(1+0{,}05)}\ \text{(zł)}$$

Druga rata spłacona zostanie po dwóch kwartałach. Stąd do części kredytu spłaconej w drugiej racie odsetki będą naliczane przez dwa kwartały (przy czym kapitalizowane będą dwukrotnie – po pierwszym i po drugim kwartale). Tak więc w drugiej racie część kredytu stanowi

$$\frac{K_R}{(1+0{,}05)^2}$$

Podobnie będzie w przypadku trzeciej i czwartej raty. Suma czterech części kredytu jest oczywiście równa wartości całego kredytu. Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{K_R}{(1+0{,}05)}+\frac{K_R}{(1+0{,}05)^2}+\frac{K_R}{(1+0{,}05)^3}+\frac{K_R}{(1+0{,}05)^4}=100\,000,\quad \text{czyli}$$

$$K_R\left(\frac{1}{(1+0{,}05)}+\frac{1}{(1+0{,}05)^2}+\frac{1}{(1+0{,}05)^3}+\frac{1}{(1+0{,}05)^4}\right)=100\,000$$

Sumę w nawiasie obliczamy podobnie jak w przykładzie 5. Następnie wyznaczamy K_R. Otrzymujemy:

$K_R \approx 28\,201{,}19$ (zł)

Firma spłaci cztery takie raty, czyli

$4 \cdot 28\,201{,}19 = 112\,804{,}76$ (zł)

W tej kwocie odsetki stanowią 12 804,76 zł.

Przykład 7.

Pewna firma wzięła w banku kredyt w wysokości 100 000 zł. Kredyt ma być spłacony w czterech ratach malejących, po pierwszym, drugim, trzecim i czwartym kwartale. Oprocentowanie kredytu wynosi 20% w skali roku. Obliczymy wysokość każdej raty i łączną wartość zapłaconych odsetek.

Każda rata składa się z $\frac{1}{4}$ części kredytu, czyli 25 000 zł oraz 5% $\left(= \frac{1}{4} \cdot 20\%\right)$ odsetek od niespłaconej części kredytu. Mamy więc:

I rata	$25\,000 + 5\% \cdot 100\,000 = 25\,000 + 5000 = 30\,000$ (zł)
II rata	$25\,000 + 5\% \cdot 75\,000 = 25\,000 + 3750 = 28\,750$ (zł)
III rata	$25\,000 + 5\% \cdot 50\,000 = 25\,000 + 2500 = 27\,500$ (zł)
IV rata	$25\,000 + 5\% \cdot 25\,000 = 25\,000 + 1250 = 26\,250$ (zł)

Wartość odsetek jest równa:

$5000 + 3750 + 2500 + 1250 = 12\,500$ (zł)

Zauważ, że spłacając kredyt w systemie rat malejących, firma zapłaci mniejsze odsetki niż spłacając ten sam kredyt w systemie rat równych (porównaj przykład 6.).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Z okazji 10. urodzin Kasi dziadkowie założyli lokatę w banku, wpłacając 5000 zł. Bank stosuje półroczną kapitalizację odsetek przy rocznej stopie procentowej 4%. Jaką kwotę otrzyma Kasia z chwilą osiągnięcia wieku 18 lat?
2. Pan Maciej założył trzyletnią lokatę, wpłacając do banku 10 000 zł. Bank stosuje kwartalną kapitalizację odsetek przy rocznej stopie procentowej 8%. Oblicz, jaką kwotę otrzyma pan Maciej po trzech latach.
3. Pani Marta wpłaciła pewną kwotę na trzyletnią lokatę, której roczne oprocentowanie wynosiło 5%. Kapitalizacja odsetek następowała po każdym roku oszczędzania. Wiedząc, że po trzech latach pani Marta miała na koncie 23 152,50 zł, oblicz, jaką kwotę wpłaciła pani Marta na tę lokatę.

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

Przykład 1.

Trzy liczby x, y, z w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa 21. Jeśli każdą z liczb x i y zmniejszymy o 4 i nie zmienimy liczby z, to otrzymane liczby będą trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznaczymy ciąg arytmetyczny (x, y, z).

Liczby x, y, z tworzą ciąg arytmetyczny (x, y, z), więc

$$2y = x + z$$

Dodajemy do obu stron równania y i otrzymujemy:

$$3y = x + y + z = 21, \quad \text{skąd}$$

$$y = 7, \quad \text{więc}$$

$$14 = x + z$$

Z warunków zadania wynika, że ciąg $(x-4, 3, z)$ jest ciągiem geometrycznym, zatem na mocy ostatniego twierdzenia otrzymujemy, że

$$3^2 = z \cdot (x-4)$$

(zauważ, że żaden z wyrazów ciągu $(x-4, 3, z)$ nie jest równy zeru). Otrzymaliśmy układ równań

$$\begin{cases} 14 = x + z \\ 9 = z \cdot (x-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 14 - x \\ 9 = (14-x)(x-4) \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie

$$9 = (14-x)(x-4)$$

$$9 = 14x - 56 - x^2 + 4x$$

$$0 = -x^2 + 18x - 65$$

$$\Delta = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x = 13 \vee x = 5$$

Wracamy do układu równań

$$\begin{cases} x = 5 \\ z = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 13 \\ z = 1 \end{cases}$$

Warunki zadania spełniają dwa ciągi arytmetyczne: $(5, 7, 9)$ i $(13, 7, 1)$.

Przykład 2.

Pierwszy wyraz malejącego ciągu arytmetycznego i pewnego ciągu geometrycznego jest równy 1. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest piątym wyrazem ciągu arytmetycznego, a czwarty wyraz ciągu geometrycznego jest czternastym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznaczymy różnicę ciągu arytmetycznego.

Przyjmijmy oznaczenia:

(a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r, $a_1 = 1$

(b_n) – ciąg geometryczny o ilorazie q, $b_1 = 1$

Z warunków zadania wynika, że

$$\begin{cases} a_5 = b_3 \\ a_{14} = b_4 \end{cases} \quad \text{czyli}$$

$$\begin{cases} 1 + 4r = q^2 & / \cdot 13 \\ 1 + 13r = q^3 & / \cdot 4 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 13 + 52r = 13q^2 \\ 4 + 52r = 4q^3 \end{cases}$$

$$9 = 13q^2 - 4q^3$$

Rozwiązujemy równania

$$4q^3 - 13q^2 + 9 = 0$$
$$4q^3 - 4q^2 - 9q^2 + 9 = 0$$
$$4q^2(q-1) - 9(q^2-1) = 0$$
$$(q-1)(4q^2 - 9q - 9) = 0$$
$$q = 1 \ \vee \ 4q^2 - 9q - 9 = 0$$
$$\Delta = 225 \quad \sqrt{\Delta} = 15$$
$$q = 3 \ \vee \ q = \frac{-3}{4}$$

Wracamy do układu równań. Otrzymujemy

$$\begin{cases} q = 1 \\ r = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} q = 3 \\ r = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} q = \frac{-3}{4} \\ r = \frac{-7}{64} \end{cases}$$

Ciąg arytmetyczny jest malejący, więc różnica tego ciągu jest ujemna.

Różnica ciągu arytmetycznego jest równa $\frac{-7}{64}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

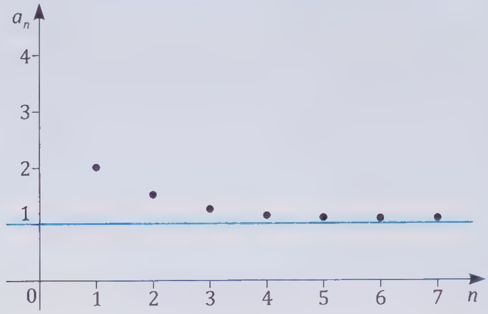
1. Ciąg $(a, b, 4)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(4, a, b)$ jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz a, b.
2. Ciąg (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym, a ciąg (b, c, d) jest ciągiem arytmetycznym. Wiedząc, że $a + d = 16$ oraz $b + c = 12$, wyznacz ciąg (a, b, c, d).

Granica ciągu liczbowego

Popatrzmy na wykresy trzech ciągów nieskończonych (a_n), (b_n) i (c_n):

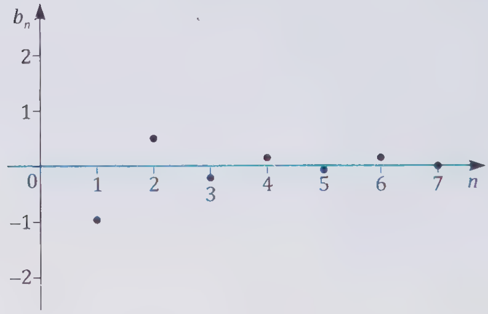
a)

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$



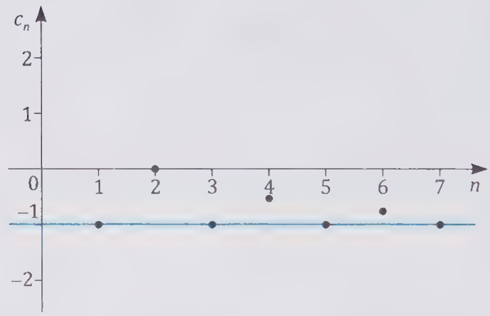
b)

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$



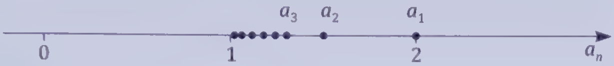
c)

$$c_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n} - 1$$



Łatwo zauważyć, że wyrazy każdego z tych ciągów wraz ze wzrostem liczby n „zbliżają się do pewnej liczby (granicy)". Wyrazy ciągu (a_n) „zbliżają się" do 1, wyrazy ciągu (b_n) – do 0, wyrazy ciągu (c_n) – do (-1). To „zbliżanie" może być „bardziej regularne" (tak jest w przypadku ciągu (a_n)) lub „mniej regularne" (tak jest w przypadku ciągów (b_n) i (c_n)). Niektóre z wyrazów ciągu mogą być równe „granicy" (ciąg (c_n)) lub żaden z wyrazów ciągu może nie być równy „granicy" (ciągi (a_n) i (b_n)). Zastanowimy się teraz, co dokładnie oznacza stwierdzenie, że nieskończony ciąg liczbowy ma granicę.

Zaznaczmy wyrazy ciągu (a_n) na osi liczbowej.



Wyraźnie widać, że wyrazy ciągu zbliżają się do 1. Sprawdźmy, które z nich są oddalone od 1 o mniej niż np. $\frac{1}{7}$. Jak zapewne pamiętasz z klasy pierwszej, na osi liczbowej odległość punktu x_0 od punktu x jest równa $|x - x_0|$.

Mamy więc

$$|a_n - 1| < \frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad n > 7$$

Zatem począwszy od ósmego wyrazu, wszystkie kolejne wyrazy ciągu (a_n) są oddalone od 1 o mniej niż $\frac{1}{7}$. Zauważmy, że jest tylko skończona liczba wyrazów, których odległość od 1 jest większa niż $\frac{1}{7}$.

Jeśli mamy dany nieskończony ciąg (a_n) i pominiemy w tym ciągu skończona liczbę wyrazów, to o pozostałych wyrazach powiemy, że stanowią one **prawie wszystkie wyrazy ciągu**. Używając tego sformułowania, możemy powiedzieć, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, spełniają warunek $|a_n - 1| < \frac{1}{7}$.

$$\underbrace{2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{7}}_{\text{skończona liczba wyrazów}}, \underbrace{1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{9}, 1\frac{1}{10}, 1\frac{1}{11}, 1\frac{1}{12}, \ldots}_{\text{prawie wszystkie wyrazy ciągu}}$$

Sformułowanie „prawie wszystkie wyrazy ciągu" można zastąpić stwierdzeniem: „wszystkie wyrazy ciągu od pewnego miejsca". Można postawić pytanie: czy dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej ε (epsilon) prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, leżą w odległości mniejszej niż ε od 1?

Można to pytanie rozumieć tak: czy prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, leżą dowolnie blisko liczby 1? Odpowiedź twierdząca oznaczałaby, że nierówność

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

byłaby prawdziwa dla prawie wszystkich n. Przekształcając równoważnie tę nierówność, otrzymujemy

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Zatem dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) $\left(\text{mówiąc dokładniej: wyrazy o numerach większych niż } \frac{1}{\varepsilon}\right)$ spełniają nierówność $|a_n - 1| < \varepsilon$.

ε	wyrazy ciągu (a_n) spełniające nierówność $\lvert a_n - 1\rvert < \varepsilon$
$\frac{17}{120\,000}$	$1\frac{1}{7059}, 1\frac{1}{7060}, 1\frac{1}{7061}, 1\frac{1}{7062}, 1\frac{1}{7063}, 1\frac{1}{7064}, 1\frac{1}{7065}, \ldots$
$\frac{1}{1\,000\,000}$	$1\frac{1}{1\,000\,001}, 1\frac{1}{1\,000\,002}, 1\frac{1}{1\,000\,003}, 1\frac{1}{1\,000\,004}, 1\frac{1}{1\,000\,005}, \ldots$

Powyższe rozważania doprowadziły nas do definicji granicy ciągu.

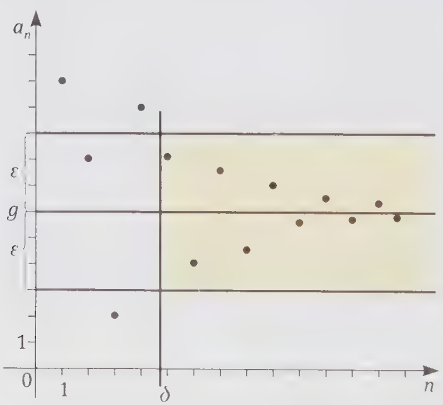
Definicja 1.
Liczba g jest **granicą ciągu** nieskończonego (a_n) – co oznaczamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \to g$, jeśli $n \to \infty$ – wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε (epsilon) prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w odległości mniejszej niż ε od liczby g.

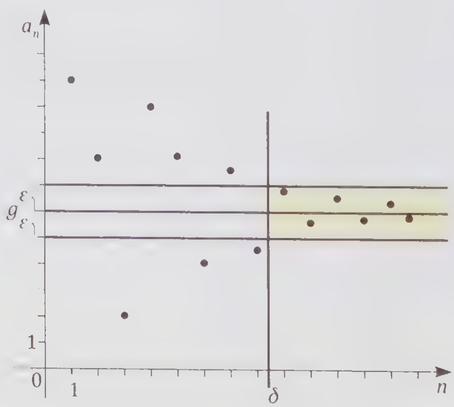
Oznaczenie „lim” jest skrótem łacińskiego słowa *limes* (= *miedza, granica*).

Jak pamiętasz, sformułowanie „prawie wszystkie wyrazy ciągu” rozumiemy jako „wszystkie wyrazy ciągu od pewnego miejsca”. Jeśli dodatkowo zapiszemy odległość za pomocą wartości bezwzględnej, to otrzymamy równoważną wersję definicji 1.

Definicja 1’.
Liczba g jest **granicą ciągu** nieskończonego (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ (delta), że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Zapis symboliczny: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{n>\delta} |a_n - g| < \varepsilon$





Ciągiem zbieżnym nazywamy ciąg nieskończony, który ma granicę (będącą liczbą rzeczywistą.

Przykład 1.

Wykażemy, że ciąg nieskończony (a_n), gdzie $a_n = \frac{2n^2+3}{n^2+5n}$, jest zbieżny do 2.

Niech $\varepsilon > 0$. Mamy wykazać (zgodnie z definicją 1'), że istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - 2| < \varepsilon$$

Rozpatrujemy wyrażenie $|a_n - 2|$. Mamy

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n^2+3}{n^2+5n} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+3}{n^2+5n} - \frac{2n^2+10n}{n^2+5n}\right| =$$

$$= \left|\frac{3-10n}{n^2+5n}\right| = \frac{10n-3}{n^2+5n} < \frac{10n}{n^2+5n} < \frac{10n}{n^2} = \frac{10}{n}$$

Mamy zatem

$$|a_n - 2| = \frac{10n-3}{n^2+5n} < \frac{10}{n} < \varepsilon, \qquad \text{stąd} \qquad n > \frac{10}{\varepsilon}, \quad \delta = \frac{10}{\varepsilon}.$$

Pokazaliśmy, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta \left(\text{np. } \delta = \frac{10}{\varepsilon}\right)$, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ prawdziwa jest nierówność $|a_n - 2| < \varepsilon$, co dowodzi, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Zauważ, że wybór liczby δ zależy od liczby ε. Najczęściej zależność ta jest taka, że im mniejsza jest liczba ε, tym większa jest liczba δ.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz, które wyrazy ciągu nieskończonego (a_n), gdzie $a_n = \frac{n}{2n-1}$ są oddalone od liczby $\frac{1}{2}$ o mniej niż $\frac{1}{10}$.
2. Wykaż, że granicą ciągu nieskończonego (a_n), gdzie $a_n = \frac{4n+3}{n}$, jest liczba 4.
3. Wykaż, że granicą ciągu nieskończonego (a_n), gdzie $a_n = \frac{-n^2}{2n^2+3}$, jest liczba $\frac{-1}{2}$.

Własności ciągów zbieżnych

W tym temacie omówimy twierdzenia charakteryzujące ciągi zbieżne.

Twierdzenie 1.
Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Dowód:
Załóżmy przeciwnie, niech ciąg nieskończony (a_n) będzie zbieżny do dwóch granic a i b $(a \neq b)$. Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b|$, (zauważ, że $\varepsilon > 0$). Zgodnie z definicją granicy ciągu prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w odległości mniejszej niż ε od a, tzn. leżą w przedziale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ oraz prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w przedziale $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, ale to jest niemożliwe, ponieważ przedziały $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ i $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ są rozłączne. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Kolejne twierdzenia ułatwią nam obliczanie granic.

Twierdzenie 2.
Jeśli nieskończony ciąg (a_n) jest ciągiem stałym i $a_n = a$, to ciąg (a_n) jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Twierdzenie 3.
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $a_n \geqslant 0$ dla każdej liczby n, $n \in \mathbf{N}_+$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Twierdzenia 2. i 3. przyjmiemy bez dowodu.

Przykład 1.

Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+5n} = 2$ (zobacz poprzedni temat).

Ponadto

$\frac{n+1}{n} > 0$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n oraz

$\frac{2n^2+3}{n^2+5n} > 0$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n.

Zatem na podstawie ostatniego twierdzenia otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n^2+3}{n^2+5n}} = \sqrt{2}.$$

Twierdzenie 4.
Jeśli $|q| < 1$, to ciąg nieskończony (a_n), gdzie $a_n = q^n$, jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Dowód:
Jeśli $q = 0$, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $q \neq 0$.
Ponieważ $q \neq 0$ oraz $|q| < 1$, więc $\frac{1}{|q|} > 1$. Oznaczmy $x = \frac{1}{|q|} - 1$. Mamy wówczas $\frac{1}{|q|} = 1 + x$, a stąd

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+x)^n > 1 + x \cdot n > x \cdot n > 0$$

W oszacowaniu powyżej zastosowaliśmy nierówność Bernoulliego (zobacz str. 365).
Mamy więc

$$\frac{1}{|q|^n} > x \cdot n, \qquad \text{stąd}$$

$$|q|^n < \frac{1}{x \cdot n}$$

Dla $\varepsilon > 0$ oznaczmy $\delta = \frac{1}{x \cdot \varepsilon}$. Wtedy, jeśli $n > \delta$, to

$$|q|^n < \frac{1}{x \cdot n} < \frac{1}{x \cdot \delta} \quad (\text{bo } x \cdot n > x \cdot \delta > 0) \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x \cdot \delta} = \varepsilon, \ \text{więc}$$

$$|q|^n < \varepsilon, \qquad \text{stąd} \qquad |q^n| < \varepsilon, \qquad \text{czyli} \qquad |q^n - 0| < \varepsilon.$$

a to znaczy, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, co kończy dowód.

Przykład 2.

Korzystając z ostatniego twierdzenia, obliczamy:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, bo $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-0{,}99)^n = 0$, bo $|-0{,}99| < 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{789}{790}\right)^n = 0$, bo $\left|\frac{789}{790}\right| < 1$.

Ciągi nieskończone można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Pokażemy to na przykładach.
Niech dane będą ciągi nieskończone (a_n) i (b_n), gdzie $a_n = n$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$. Wyznaczymy ciąg (c_n) będący sumą tych ciągów.

(a_n)	1	2	3	4	...	n	...
(b_n)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{n}$	...
$(c_n)=(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	...	$n+\frac{1}{n}$	...

Niech teraz dane będą ciągi nieskończone (a_n) i (b_n), gdzie $a_n = \frac{n}{n+1}$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$.

Wyznaczymy iloczyn ciągów (a_n) i (b_n).

(a_n)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...	$\frac{n}{n+1}$	...
(b_n)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{n}$	...
$(c_n)=(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...	$\frac{1}{n+1}$	...

Analogicznie wykonujemy odejmowanie i dzielenie ciągów, pamiętając, że dzielić można przez taki ciąg, którego wszystkie wyrazy są różne od zera.

Twierdzenie 5. (o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych)
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to istnieją granice ciągów (a_n+b_n), (a_n-b_n), $(a_n\cdot b_n)$ oraz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ przy dodatkowym założeniu, że $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, i prawdziwe są następujące równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$.

Dowód (punkt a): Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zatem istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n jeśli $n>\delta$, to prawdziwe są nierówności:

(*) $\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \quad$ i $\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$

Mamy:

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leqslant |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, \text{ czyli}$$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$$

W oszacowaniu powyżej wykorzystaliśmy własność wartości bezwzględnej $|x+y|\leqslant|x|+|y|$, gdzie $x,y\in \boldsymbol{R}$ oraz nierówności (*).

Pokazaliśmy, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba δ, taka że dla każdej liczby naturalnej $n>\delta$ prawdziwa jest nierówność $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$, co dowodzi, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

Pozostałe punkty twierdzenia przyjmiemy bez dowodu.

Przykład 3.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6}$

Ad a) Ciąg o wyrazie ogólnym $\frac{10}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, możemy zapisać w postaci iloczynu dwóch ciągów zbieżnych: ciągu stałego o wyrazach równych 10, który ma oczywiście granicę równą 10 (twierdzenie 2.) i ciągu o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$, mającego granicę równą 0. Na mocy twierdzenia 5c istnieje granica ciągu o wyrazie ogólnym $\left(10\cdot\frac{1}{n}\right)$, $n \in \boldsymbol{N}_+$, oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(10\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}10\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=10\cdot 0=0$$

Ad b) Wiemy, że istnieje granica ciągu o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$, więc istnieje też granica ciągu o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n^2}$ $\left(\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)$. Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

Ad c) Dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6}$ przez n^2 (czyli przez n w najwyższej potędze, w jakiej znajduje się w <u>mianowniku</u>):

$$\frac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6}=\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{5}{n}-\frac{6}{n^2}}$$

W liczniku otrzymanego ułamka mamy sumę trzech ciągów o wyrazach ogólnych: 2 (ciąg stały), $\frac{-3}{n}$, $\frac{7}{n^2}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Każdy z tych ciągów jest zbieżny. Na mocy twierdzenia 5a istnieje granica ciągu będącego sumą tych trzech ciągów, czyli granica licznika. Podobnie można stwierdzić, że istnieje granica ciągu znajdującego się w mianowniku ułamka. Tak więc (na mocy twierdzenia 5d) istnieje granica ilorazu. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{5}{n}-\frac{6}{n^2}}=\frac{2-0+0}{3+0-0}=\frac{2}{3}$$

Przykład 4.

Obliczymy granice ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{9^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 8^n+11}{3\cdot 8^n-1}$

Ad a) Stosujemy twierdzenie 2., twierdzenie 4. i twierdzenie 5c.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\left(7\cdot\frac{1}{9^n}\right)=\lim_{n\to\infty}7\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n=7\cdot 0=0$$

Ad b) Najpierw dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{5\cdot 8^n+11}{3\cdot 8^n-1}$ przez 8^n, następnie korzystamy z twierdzenia 2. oraz twierdzenia 4. i twierdzenia 5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 8^n+11}{3\cdot 8^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{11}{8^n}}{3-\frac{1}{8^n}}=\frac{5+0}{3-0}=\frac{5}{3}$$

Przykład 5.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+7n-1}\right)$

Ad a) W obliczeniach korzystamy z twierdzenia 2., 3. i 5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(5\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=5\cdot 0=0$$

Ad b) Wyrażenie $\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ mnożymy i dzielimy przez wyrażenie $\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)$, następnie stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i dzielimy licznik i mianownik otrzymanego ułamka przez $\sqrt{n}$. Te przekształcenia umożliwiają zastosowanie twierdzeń o granicach ciągów zbieżnych. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=0$$

Ad c) Postępujemy podobnie jak w punkcie b).

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+7n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(n-\sqrt{n^2+7n-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+7n-1}\right)}{n+\sqrt{n^2+7n-1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-7n+1}{n+\sqrt{n^2+7n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-7+\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{-7+0}{1+\sqrt{1+0-0}}=\frac{-7}{2}$$

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: Czy z tego, że iloczyn ciągów jest ciągiem zbieżnym nie wynika, że każdy z ciągów będących czynnikami iloczynu jest zbieżny? W tym celu rozpatrzmy ciągi nieskończone (a_n), (b_n) oraz (c_n) będący iloczynem ciągów (a_n) i (b_n)

(a_n)	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{6}$	1	...
(b_n)	1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{7}$	...
$(c_n)=(a_n\cdot b_n)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...

Ciąg (c_n) ma wyraz ogólny $c_n=\frac{1}{n}$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$, i jest zbieżny do 0. Natomiast ciągi (a_n) i (b_n) nie są zbieżne. Łatwo zauważyć, że wyrazy ciągu (a_n) o numerach nieparzystych tworzą ciąg stały, którego granicą jest 1, natomiast wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych tworzą ciąg zbieżny do 0. A zatem ciąg (a_n) nie ma granicy. Podobnie jest w przypadku ciągu (b_n). Tak więc z tego, że iloczyn ciągów jest ciągiem zbieżnym, nie wynika, że każdy z ciągów będących czynnikami iloczynu jest zbieżny. Analogicznie jest w przypadku sumy, różnicy i ilorazu ciągów.

Podaj przykład ciągów niemających granic, których suma, różnica i iloraz są ciągami zbieżnymi.

Następne dwa twierdzenia przyjmiemy bez dowodu.

Twierdzenie 6.

Jeśli $a>0$, to ciąg nieskończony (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n=\sqrt[n]{a}$, $n>1$, jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Twierdzenie 7. (o trzech ciągach)

Jeśli dane są trzy ciągi nieskończone (a_n), (b_n), (c_n), $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=g$ oraz istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej $n>\delta$ prawdziwa jest nierówność $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=g$.

Przykład 7.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$

Ad a) Wiemy, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2}},$$

czyli

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant\frac{1}{n}$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n}=0,$$

zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=0$$

Ad b) W tym przypadku możemy zapisać, że dla dowolnej liczby naturalnej n większej niż 1

$$\sqrt[n]{7^n}<\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}<\sqrt[n]{7^n+7^n+7^n}\text{, czyli}$$

$$7<\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}<7\sqrt[n]{3}$$

Wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty}7=7 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\left(7\sqrt[n]{3}\right)=7 \text{ (na mocy twierdzenia 6.)},$$

zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}=7$$

Rozpatrzymy na koniec ciąg nieskończony (e_n), gdzie $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Można udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny, a jego granica jest liczbą niewymierną,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718281828459045\ldots$$

Granicę ciągu (e_n) oznacza się literą e. Oznaczenie to wprowadził w 1736 r. szwajcarski matematyk Leonhard Euler. Liczba e ma duże znaczenie w matematyce i w innych naukach. Występuje bowiem w wielu modelach matematycznych opisujących procesy społeczne i przyrodnicze.

Oto jak można interpretować liczbę e. Pewien bank daje za roczny depozyt 100% zysku. Odsetki mogą być doliczane do kwoty depozytu w różny sposób. Na przykład odsetki mogą być doliczone raz, na koniec roku. Wówczas jeśli zainwestujemy 1 zł, na koniec roku będziemy mieć 2 zł. Jeśli odsetki doliczane są co pół roku (czyli są dwa okresy kapitalizacji), to na koniec roku będziemy mieć na koncie

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25\ [\text{zł}]$$

Jeśli kapitalizacja odbywałaby się co kwartał, wówczas na koniec roku mielibyśmy kwotę

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2{,}44\ [\text{zł}]$$

Jeśli kapitalizacja odbywałaby się co miesiąc – mielibyśmy na koniec roku

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61\ [\text{zł}]$$

Jeśli kapitalizacja odbywałaby się codziennie – mielibyśmy na koniec roku

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}71\ [\text{zł}]$$

Gdyby zaś kapitalizacja odbywała się w sposób ciągły (czyli liczba okresów kapitalizacji dążyłaby do nieskończoności), wówczas na koniec roku mielibyśmy na koncie

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, czyli e zł.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n+1}+7\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n}-1\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-1}{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{1-n^2}$

2. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{9}{n^2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n-1}{n}}$

3. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3^n}+1\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n-1}{1+3^n}$

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

Powiemy, że ciąg nieskończony jest rozbieżny do $+\infty$ (ma granicę niewłaściwą $+\infty$) wtedy, gdy jego wyrazy „wzrastają nieograniczenie". Inaczej mówiąc – prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od dowolnie wybranej liczby M. Analogicznie ciąg nieskończony jest rozbieżny do $-\infty$ (ma granicę niewłaściwą $-\infty$) wtedy, gdy prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od dowolnie wybranej liczby M.

Definicja 1.
Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągiem rozbieżnym do plus nieskończoności** wtedy i tylko tedy, gdy dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ zachodzi nierówność $a_n > M$.

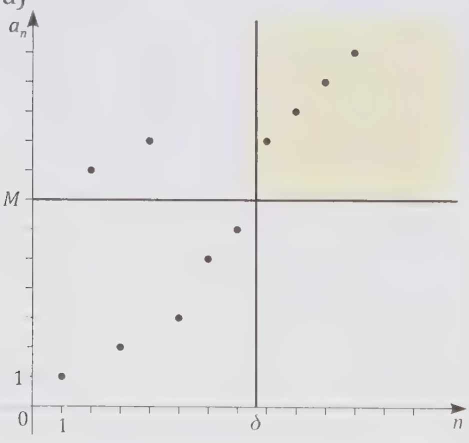
Zapis symboliczny: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{M} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{n>\delta} a_n > M$

Definicja 2.
Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągiem rozbieżnym do minus nieskończoności** wtedy i tylko tedy, gdy dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ zachodzi nierówność $a_n < M$.

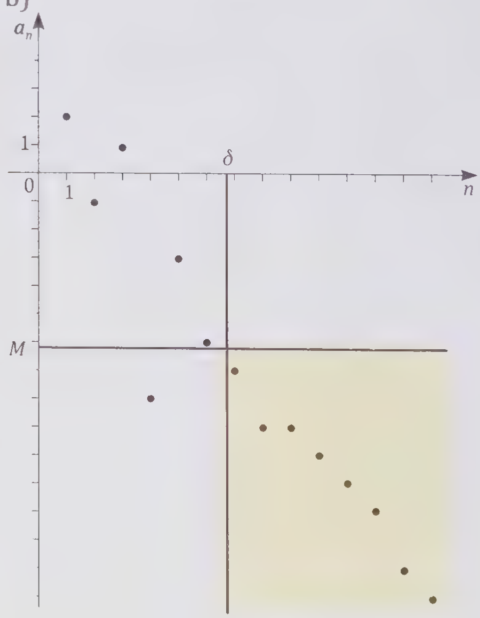
Zapis symboliczny: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{M} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{n>\delta} a_n < M$

Rysunek a) poniżej jest ilustracją definicji 1., a rysunek b) jest ilustracją definicji 2.

a)



b)



Na rysunku a) i b) w obszarze zaznaczonym kolorem znajdują się punkty odpowiadające prawie wszystkim wyrazom ciągu (a_n). Inaczej mówiąc: poza tym obszarem jest tylko skończona liczba punktów należących do wykresu ciągu (a_n) (dla dowolnej liczby M).

Przykład 1.

Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$.

Niech M oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Mamy wskazać taką liczbę δ, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ spełniona jest nierówność $2n - 1 > M$. Mamy

$$2n - 1 > M \quad \Leftrightarrow \quad 2n > M + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{M+1}{2}$$

Możemy przyjąć, że

$$\delta = \frac{M+1}{2}$$

Dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ $\left(\text{np. } \delta = \dfrac{M+1}{2}\right)$, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ jest spełniona nierówność $2n - 1 > M$, co dowodzi, że

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$$

Omówimy teraz kilka twierdzeń, które ułatwiają obliczanie granic.

> **Twierdzenie 1.**
>
> Jeśli dany jest ciąg nieskończony (a_n), dla którego $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0$.

Przykład 2.

Ciąg nieskończony (a_n), o wyrazie ogólnym $a_n = n \cdot (-1)^n$, nie ma granicy (nawet niewłaściwej), ale

$$\lim_{n\to\infty}\left|n \cdot (-1)^n\right| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

więc na podstawie twierdzenia 1. mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n \cdot (-1)^n} = 0$$

> **Twierdzenie 2.**
>
> Jeśli dany jest ciąg nieskończony (a_n), dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n|} = +\infty$.

Podaj przykład pokazujący, że nie można opuścić znaku wartości bezwzględnej w tezie twierdzenia 2.

Twierdzenie 3.

Dane są ciągi nieskończone (a_n) i (b_n), dla których $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas:

1) jeśli $b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$

2) jeśli $b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Analogiczne twierdzenia można sformułować dla przypadków, gdy ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ i ciąg (b_n) jest zbieżny do liczby b, $b \neq 0$.

Przykład 3.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 1\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-6n^3 + 2n^2 - 9n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3 + 2n^2 - 3n + 7}{n^2 + 5n - 7}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4 + 3n^2 + 1}{-4n + 9}$

Ad a) Z wyrażenia $2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 1$ wyłączamy przed nawias n^4. Otrzymujemy

$$n^4\left(2 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)$$

Czynnik n^4 dąży do $+\infty$, a wyrażenie w nawiasie – do 2. Zatem – na mocy twierdzenia 3. – mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 1\right) = \lim_{n\to\infty} n^4\left(2 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) = +\infty$$

Ad b) Postępujemy podobnie jak w punkcie a).

$$\lim_{n\to\infty}\left(-6n^3 + 2n^2 - 9n\right) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(-6 + \frac{2}{n} - \frac{9}{n^2}\right) = -\infty$$

Ad c) Dzielimy licznik i mianownik ułamka $\dfrac{n^3 + 2n^2 - 3n + 7}{n^2 + 5n - 7}$ przez n^2. Otrzymane wyrażenie zapisujemy w postaci iloczynu. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + 2n^2 - 3n + 7}{n^2 + 5n - 7} = \lim_{n\to\infty}\frac{n + 2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(n + 2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{1 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n + 2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}} = 1, \quad \text{stąd}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + 2n^2 - 3n + 7}{n^2 + 5n - 7} = +\infty$$

Ad d) Postępujemy podobnie jak w punkcie c). Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n^2+1}{-4n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n+\frac{1}{n}}{-4+\frac{9}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\boxed{n^3\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{-4+\frac{9}{n}}}}_{\to-\frac{1}{4}}\right)=-\infty$$

Załóżmy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Co można powiedzieć o granicy ciągu $(a_n\cdot b_n)$? Zanim odpowiesz na to pytanie, przeanalizuj następujący przykład.

Przykład 4.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}n^4=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^3=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{n}\right)=0$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{-2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(-2)=-2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)=0$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\frac{-1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$

Podobnie przeanalizuj istnienie granicy ciągu (a_n-b_n), jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$. Pomoże Ci w tym przykład 5.

Przykład 5.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}2n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}(2n-n)=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\big(n-(2n+2)\big)=\lim\limits_{n\to\infty}(-2)=-2$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}(n-n)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+5)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}(n+5-n)=\lim\limits_{n\to\infty}5=5$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}3n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}4n=+\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}(3n-4n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Które wyrazy ciągu nieskończonego (a_n) są większe od liczby M, jeśli:
   a) $a_n=2n-500,\ \ M=1000$ $\qquad$ b) $a_n=n^2-6n+5,\ \ M=7$
2. Wykaż na podstawie odpowiedniej definicji, że:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-3n)=-\infty$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-5\right)=+\infty$

Szereg geometryczny

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. **Szeregiem liczbowym** będziemy nazywać sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n) i oznaczać:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$$

Wyrażenie

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

nazywamy **sumą częściową szeregu**. Jeśli ciąg sum częściowych (S_n) ma granicę S, czyli

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

to mówimy, że szereg liczbowy jest zbieżny (liczba S jest sumą tego szeregu) i zapisujemy

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots = S$$

W przeciwnym wypadku powiemy, że szereg liczbowy jest rozbieżny.

Przykład 1.

Dany jest szereg liczbowy: $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots$

Obliczymy kilka kolejnych, początkowych sum częściowych:

$$S_1 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$$

$$S_4 = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

Łatwo zauważyć, że n-tą sumę częściową można zapisać tak:

$$S_n = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

Ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

Można więc zapisać: $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots = \frac{1}{2}$

Przykład 2.

Szereg $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$ nazywa się szeregiem harmonicznym. Sumy częściowe tego szeregu wzrastają nieograniczenie, chociaż bardzo powoli. Szereg harmoniczny jest więc rozbieżny.

W ogólnym przypadku wyznaczenie sumy szeregu lub tylko ustalenie, czy szereg jest zbieżny, bywa zadaniem bardzo trudnym.

Dokładniej omówimy szereg geometryczny.

Twierdzenie 1.

Jeśli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q, który spełnia warunek $|q| < 1$, to szereg geometryczny

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \dots$$

jest zbieżny i jego suma wynosi $\dfrac{a_1}{1-q}$.

Dowód:

Częściową sumę szeregu geometrycznego, jak już wiesz, można wyrazić wzorem

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q}$$

Z twierdzenia 4. ze str. 379 wiemy, że jeśli $|q| < 1$, to

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Dodatkowo, jeśli uwzględnimy twierdzenie 5. ze str. 380, to otrzymamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q} = 0, \quad \text{zatem}$$

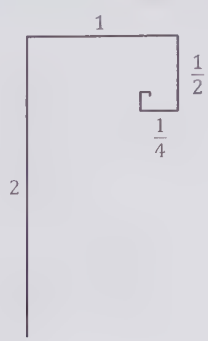
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}$$

Tak więc można zapisać

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \dots = \frac{a_1}{1-q}$$

Przykład 3.

Obliczymy długość linii łamanej zbudowanej z nieskończenie wielu odcinków, wiedząc, że najdłuższy odcinek ma długość 2, a każdy następny jest o połowę krótszy od poprzedniego.



Suma długości odcinków tworzy szereg geometryczny. Można przyjąć:

$$a_1 = 2 \qquad q = \frac{1}{2}$$

Ponieważ prawdziwa jest nierówność $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, więc ten szereg geometryczny jest zbieżny

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

Linia łamana ma długość 4.

Przykład 4.

Następujące ułamki okresowe zapiszemy w postaci ilorazu liczb naturalnych:

a) 0,7777777777777...

b) 1,1282828282828...

Ad a) Ułamek ten można zapisać tak:

$$0{,}77777777\ldots = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + 0{,}00007 + \ldots$$

czyli w postaci szeregu geometrycznego, w którym

$$a_1 = 0{,}7 \quad \text{i} \quad q = 0{,}1.$$

Ponieważ $|0{,}1| < 1$, więc szereg geometryczny jest zbieżny i suma tego szeregu jest równa

$$\frac{0{,}7}{1 - 0{,}1}, \quad \text{czyli} \quad \frac{7}{9}.$$

Można więc zapisać

$$0{,}77777777\ldots = \frac{7}{9}$$

Ad b) W tym przypadku mamy

$$1{,}128282828\ldots = 1{,}1 + \underbrace{0{,}028 + 0{,}00028 + 0{,}0000028 + \ldots}_{\text{szereg geometryczny zbieżny}} =$$

$$= 1{,}1 + \frac{0{,}028}{1 - 0{,}001} = 1{,}1 + \frac{0{,}028}{0{,}99} = \frac{11}{10} + \frac{28}{990} =$$

$$= \frac{1089 + 28}{990} = \frac{1117}{990}$$

Mamy więc

$$1{,}128282828\ldots = \frac{1117}{990}$$

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność:

$$x + x(x+2) + x(x+2)^2 + x(x+2)^3 + \ldots \leqslant -3$$

Określamy najpierw dziedzinę nierówności. Lewa strona tej nierówności jest szeregiem geometrycznym, w którym

$$a_1 = x \quad \text{i} \quad q = x + 2$$

Aby szereg był zbieżny, ma być spełniony warunek:

$$|q| < 1$$

Mamy więc

$$|q| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 1 \Leftrightarrow x \in (-3, -1)$$

Dziedziną nierówności jest przedział $(-3, -1)$. Stosujemy teraz wzór na sumę szeregu geometrycznego i otrzymujemy

$$(*) \quad \frac{x}{1-(x+2)} \leqslant -3$$

Ponieważ $\bigwedge\limits_{x \in (-3,-1)} [1-(x+2)] > 0$, więc możemy pomnożyć obie strony nierówności (*) przez $[1-(x+2)]$ i nie zmieniać znaku nierówności.

$$\frac{x}{1-(x+2)} \leqslant -3 \quad / \cdot [1-(x+2)]$$

$$x \leqslant -3 + 3x + 6$$

$$-2x \leqslant 3 \quad / : (-2)$$

$$\underbrace{x \geqslant \frac{-3}{2} \wedge x \in (-3, -1)}_{\Updownarrow}$$

$$x \in \left\langle \frac{-3}{2}, -1 \right)$$

Rozwiązaniem nierówności jest przedział $\left\langle \frac{-3}{2}, -1 \right)$.

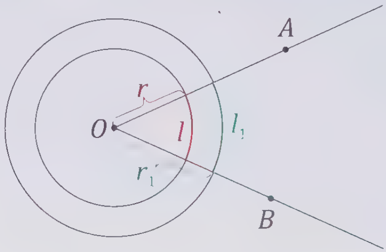
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Podane ułamki okresowe zapisz w postaci ilorazu liczb całkowitych:
   a) 2,299999... b) 0,102102102... c) −1,23434343434...
2. W trójkącie ABC o polu równym 27 cm^2 połączono środki boków i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$. W trójkącie $A_1B_1C_1$ również połączono środki boków i otrzymano trójkąt $A_2B_2C_2$. Postępując podobnie dalej, otrzymano nieskończony ciąg trójkątów. Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów.

8. Trygonometria

Miara łukowa kąta

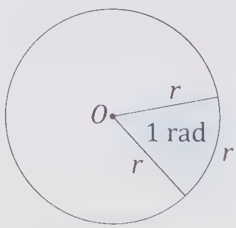
W klasie pierwszej przypomnieliśmy miarę stopniową kąta. Teraz podamy inny sposób mierzenia kątów.
Niech będzie dany kąt AOB. Kreślimy okrąg o środku w punkcie O (w wierzchołku kąta) i dowolnym promieniu. Stosunek długości łuku, będącego częścią wspólną okręgu i kąta, do promienia okręgu nazywamy **miarą łukową kąta**.



Stosunek długości łuku do promienia nie zależy od okręgu. To znaczy, że jeśli narysujemy okrąg o promieniu r_1 i częścią wspólną tego okręgu i kąta będzie łuk długości l_1, to

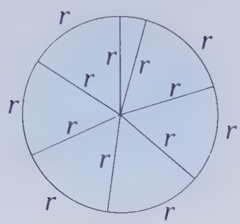
$$\frac{l_1}{r_2} = \frac{l}{r}.$$

Kąt, którego miara łukowa jest równa 1 (kąt jednostkowy), nazywamy **radianem** (radian oznaczamy skrótem rad).



Ustalimy teraz zależność między miarą łukową i miarą stopniową. Wyznaczymy najpierw miarę łukową kąta pełnego, czyli stosunek długości okręgu do jego promienia. Wiesz, że długość okręgu o promieniu r wynosi $2\pi r$. Zatem:

$$\text{miara łukowa kąta pełnego} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \quad \text{(rad)}.$$



UWAGA: Zapisując miarę łukową kąta, będziemy często opuszczać skrót „rad", np. zamiast „kąt pełny ma miarę 2π rad" będziemy pisać „kąt pełny ma miarę 2π".

Tak więc mierze $360°$ odpowiada miara 2π (co w przybliżeniu jest równe 6,28). Aby móc przeliczać miarę stopniową dowolnego kąta na miarę łukową (i odwrotnie), musimy odwoływać się do jeszcze jednej własności:

Miara kąta, którego wierzchołkiem jest środek okręgu, jest wprost proporcjonalna do długości łuku wyznaczonego przez ten kąt. Na przykład kątowi dwa razy większemu odpowiada dwa razy dłuższy łuk, a kątowi trzy razy mniejszemu odpowiada łuk trzy razy krótszy.

Przykład 1.

Zamienimy miarę stopniową: $30°$, $60°$, $90°$, $135°$, $1°$ na miarę łukową.

Niech

$360°$ odpowiada 2π

$30°$ odpowiada x.

Wówczas:

$$\frac{360°}{30°} = \frac{2\pi}{x}$$

$$x = \frac{30° \cdot 2\pi}{360°}$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \text{ więc}$$

$$30° = \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}$$

Postępując podobnie – otrzymujemy:

$$60° = \frac{\pi}{3} \text{ (rad)} \qquad 90° = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} \qquad 135° = \frac{3}{4}\pi \text{ (rad)} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}$$

W ogólnym przypadku możemy zapisać:

$$t° = \frac{\pi \cdot t}{180} \text{ (rad)}$$

Przykład 2.

Zapiszemy w mierze stopniowej: $\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi, 4$.

Niech

360° odpowiada 2π

x (stopni) odpowiada π.

Mamy:

$$\frac{360^\circ}{x} = \frac{2\pi}{\pi}$$

$$x = \frac{360^\circ \cdot \pi}{2\pi}$$

$$x = 180^\circ,$$

więc

$$\pi\ (\text{rad}) = 180^\circ$$

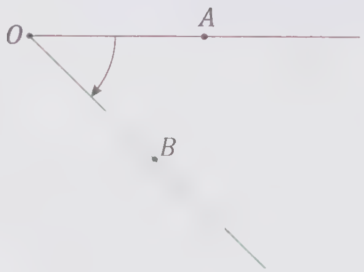
Po przeprowadzeniu analogicznych obliczeń uzyskaliśmy wyniki:

$$\frac{\pi}{4}\ (\text{rad}) = 45^\circ \qquad \frac{2}{3}\pi\ (\text{rad}) = 120^\circ \qquad 4\ (\text{rad}) = \frac{720^\circ}{\pi}$$

Ogólnie możemy zapisać:

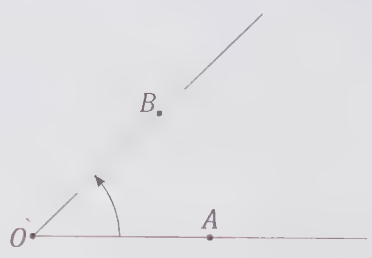
$$t\ \text{rad} = \left(\frac{180 \cdot t}{\pi}\right)^\circ$$

Miarę łukową będziemy stosować zarówno w przypadku kątów płaskich (nieskierowanych), jak i w przypadku kątów skierowanych. Przypomnijmy: kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Pierwszą z tych półprostych nazywamy ramieniem początkowym kąta, drugą – ramieniem końcowym. Kąt taki może być albo skierowany ujemnie, albo skierowany dodatnio.



$|\sphericalangle AOB| = \frac{-\pi}{4}$

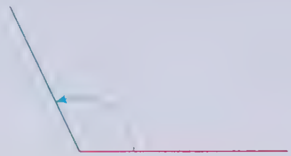
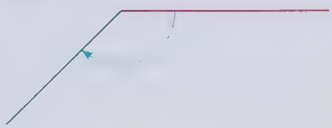
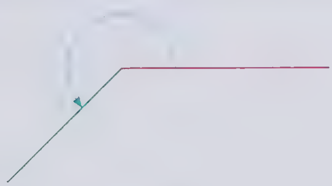
kąt skierowany ujemnie



$|\sphericalangle AOB| = \frac{\pi}{4}$

kąt skierowany dodatnio

Liczbą z jakiego przedziału będzie wyrażać się miara główna kąta skierowanego (jeśli miarę będziemy wyrażać w radianach)? Wprowadzenie miary łukowej ma istotne znaczenie, ponieważ dzięki temu każda liczba rzeczywista jest miarą pewnego kąta skierowanego. W tabeli poniżej zostały przedstawione przykładowe liczby rzeczywiste i odpowiadające im kąty skierowane.

Miara łukowa x	Kąt skierowany odpowiadający mierze łukowej x
2	
$\frac{-1}{3}$	
$\frac{-3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{4}$	

Sprawdź, czy rozumiesz

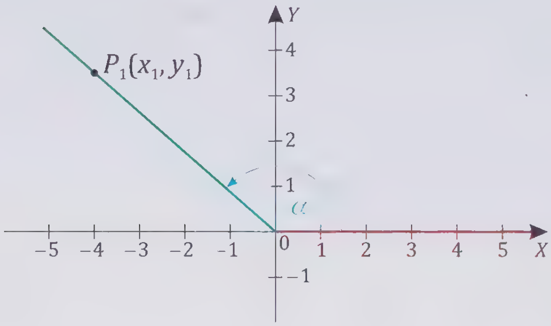
1. Zamień stopnie na radiany.
   a) $105°$ b) $140°$ c) $165°$
   d) $710°$ e) $315°$ f) $240°$

2. Zamień radiany na stopnie.
   a) $\frac{7\pi}{12}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{9\pi}{2}$
   d) $\frac{7\pi}{4}$ e) $\frac{11\pi}{12}$ f) $\frac{31\pi}{18}$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

W klasie pierwszej omówiliśmy funkcje trygonometryczne kąta skierowanego, którego miara wyrażona była w stopniach. Poznałeś definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kąta α, podstawowe tożsamości trygonometryczne oraz wybrane wzory redukcyjne. Przypomnimy te zagadnienia, przy czym będziemy posługiwać się miarą łukową, a nie stopniową.

Niech dany będzie kąt skierowany o mierze α, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, w położeniu standardowym. Na końcowym ramieniu kąta wybieramy punkt $P(x_1, y_1)$ różny od punktu $O(0, 0)$. Wówczas:



$$\sin\alpha = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} \qquad x_1 \neq 0$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} \qquad y_1 \neq 0$$

Z powyższej definicji wynika, że sinus i cosinus są określone dla dowolnej liczby rzeczywistej, tangens nie jest określony dla liczb mających postać $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$, natomiast cotangens nie jest określony dla liczb mających postać $k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$. Przypomnij sobie, jakie wartości (dodatnie czy ujemne) przyjmują funkcje trygonometryczne w zależności od położenia końcowego ramienia kąta.

Przypomnijmy podstawowe tożsamości trygonometryczne:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\quad \alpha \in \boldsymbol{R}$

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\quad \alpha \neq k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\quad \alpha \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{C}$

Przykład 1.

Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-8}{15}$ i $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, obliczymy $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Obliczamy najpierw ctg α. Korzystamy z własności 4):

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ czyli } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{-15}{8}$$

Korzystamy teraz z własności 2) i otrzymujemy

$$\frac{-8}{15} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ stąd } \sin\alpha = \frac{-8}{15}\cos\alpha$$

Do wzoru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ w miejsce $\sin\alpha$ wstawiamy $\frac{-8}{15}\cos\alpha$.

$$\left(\frac{-8}{15}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \qquad \frac{64}{225}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{289}{225}\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{225}{289} \quad \text{i} \quad \cos\alpha > 0, \text{ bo } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{15}{17}$$

Na koniec obliczamy $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{-8}{15}\cos\alpha, \quad \text{czyli}$$

$$\sin\alpha = \frac{-8}{17}$$

Szukane wartości to: $\sin\alpha = \frac{-8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-15}{8}$.

Przykład 2.

Wykażemy, że jeśli $\sin\alpha = \dfrac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma}$ i $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $\cos\alpha = \dfrac{\cos\beta + \cos\gamma}{1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma}$.

Korzystamy z własności 1), aby wyznaczyć $\cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma}\right)^2 = \frac{(1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma)^2 - (\sin\beta \cdot \sin\gamma)^2}{(1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2\cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma - \sin^2\beta\sin^2\gamma}{(1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2\cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma - (1 - \cos^2\beta)(1 - \cos^2\gamma)}{(1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2\beta + 2\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma}{(1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma)^2} = \frac{(\cos\beta + \cos\gamma)^2}{(1 + \cos\beta \cdot \cos\gamma)^2}$$

Otrzymaliśmy

$$\cos^2\alpha = \frac{(\cos\beta + \cos\gamma)^2}{(1+\cos\beta\cdot\cos\gamma)^2} \quad \text{i } \cos\alpha > 0 \text{ oraz } \cos\beta > 0,\ \cos\gamma > 0, \text{ więc}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{1+\cos\beta\cdot\cos\gamma},$$ co kończy dowód.

Przypomnijmy wzory redukcyjne, czyli wzory umożliwiające zapisanie tych samych wartości funkcji trygonometrycznych za pomocą innych (najczęściej mniejszych) argumentów. Jeśli argument funkcji trygonometrycznej można zapisać w postaci $m\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $m \in \boldsymbol{C}$, to wartość tej funkcji można wyrazić też za pomocą argumentu α, np.:

$$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha,\quad \alpha\in\boldsymbol{R}$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha,\quad \alpha\in\boldsymbol{R}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha,\quad \alpha\neq k\pi,\ k\in\boldsymbol{C}$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha,\quad \alpha\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{C}$$

Przypomnijmy sposób zapamiętania wzorów redukcyjnych:
Zakładamy, że α jest kątem ostrym, a następnie:

1) Sprawdzamy, jaki znak ma interesujące nas wyrażenie; zapisujemy go po prawej stronie równości.
2) Jeśli we wzorze liczba poprzedzająca $+\alpha$ (lub $-\alpha$) jest nieparzystą wielokrotnością $\frac{\pi}{2}$, np. $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, to funkcja zmienia się na kofunkcję (sinus na cosinus, cotangens na tangens); jeśli nie – funkcja pozostaje bez zmiany.

Przykład 3.

Obliczymy wartości wyrażeń:

a) $\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{-9\pi}{4}\right)-\sin(4\pi)$ b) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

Ad a) Obliczamy:

$$\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{-9\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(-2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$\sin(4\pi) = 0,$ zatem

$$\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{-9\pi}{4}\right)-\sin(4\pi) = \frac{-1}{2}-1+0 = -1\frac{1}{2}$$

Ad b) Obliczamy:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1}{2}$$

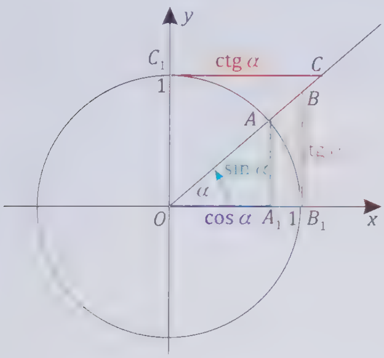
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{-\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1, \qquad \text{zatem}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{4}\right)=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-1=\frac{-9-2\sqrt{3}}{6}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych mają ciekawą interpretację na tzw. kole trygonometrycznym. Przedstawimy ją w przypadku kąta, którego miara α jest z przedziału $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Umieszczamy w układzie współrzędnych kąt skierowany o mierze α w położeniu standardowym i kreślimy okrąg o środku w punkcie $O(0, 0)$ i promieniu 1. Wówczas wartości funkcji trygonometrycznych można traktować jako długości pewnych odcinków. Mamy bowiem



$$\sin\alpha=\frac{|AA_1|}{|OA|} \qquad \cos\alpha=\frac{|OA_1|}{|OA|}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|BB_1|}{|OB_1|} \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{|CC_1|}{|OC_1|}$$

Ponieważ $|OA|=|OB_1|=|OC_1|=1$, więc

$\sin\alpha=|AA_1|$ $\qquad$ $\cos\alpha=|OA_1|$

$\operatorname{tg}\alpha=|BB_1|$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha=|CC_1|$

Odcinki BB_1 i CC_1 są styczne do okręgu.

Z tą geometryczną interpretacją jest związane pochodzenie nazw funkcji trygonometrycznych. Otóż nazwa *sinus* jest pochodzenia łacińskiego i oznacza „zakrzywienie", „zatokę". Z kolei nazwa *cosinus* jest skrótem wyrażenia łacińskiego *complementi sinus* oznaczającego „sinus dopełnienia". Dopełnieniem α do $\frac{\pi}{2}$ jest $\frac{\pi}{2}-\alpha$, a jak już wiesz, $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Nazwa *tangens* jest również pochodzenia łacińskiego oznacza „dotykający", „styczny". Nazwa *cotangens* jest zbudowana analogicznie do nazwy *cosinus*.

Wiesz już, że dowolnej liczbie rzeczywistej x odpowiada jeden i tylko jeden kąt skierowany. Z kolei kątowi skierowanemu przyporządkowane są (zgodnie z definicją przypomnianą na początku tego tematu), w sposób jednoznaczny, liczby: sinus x, cosinus x, tangens x i cotangens x.

Zatem możemy określić cztery funkcje, których argumentami i wartościami są liczby rzeczywiste.

sinus: $x \to \sin x$, czyli $y = \sin x,\ x \in \mathbf{R}$

cosinus: $x \to \cos x$, czyli $y = \cos x,\ x \in \mathbf{R}$

tangens: $x \to \operatorname{tg} x$, czyli $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \mathbf{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{C}\right\}$

cotangens: $x \to \operatorname{ctg} x$, czyli $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in \mathbf{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \mathbf{C}\}$.

Poznamy teraz własności wyżej określonych funkcji, które wynikają bezpośrednio ze wzorów redukcyjnych.

Okresowość funkcji trygonometrycznych

Przypomnijmy określenie funkcji okresowej:
Funkcję liczbową f nazywamy funkcją okresową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba T różna od zera, że dla każdej liczby x należącej do dziedziny funkcji f, liczba $x + T$ też należy do dziedziny tej funkcji i zachodzi równość $f(x + T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy okresem funkcji f. Jeśli istnieje najmniejszy okres dodatni funkcji f, to nazywamy go okresem podstawowym (lub okresem zasadniczym).

Okresem każdej funkcji trygonometrycznej jest liczba 2π. Powstaje pytanie, czy liczba 2π jest okresem zasadniczym każdej z tych funkcji. Okazuje się, że w przypadku funkcji

$$y = \sin x \ \text{ oraz } \ y = \cos x$$

liczba 2π jest okresem podstawowym, co zapiszemy $T_0 = 2\pi$. Mamy zatem:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \text{ oraz } \ \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Wiesz już, że

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbf{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{C}\right\} \qquad \text{oraz}$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in \mathbf{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \mathbf{C}\}$$

co wskazywałoby na to, że liczba π jest też okresem funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$. Czy jest to okres zasadniczy? Okazuje się, że tak. Przeprowadzimy dowód dla funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

Założenie: $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \mathbf{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{C}\right\}$

Teza: π jest okresem zasadniczym funkcji $y = \operatorname{tg} x$

Dowód (nie wprost): Założymy, że istnieje dodatnia liczba T_0 mniejsza od π, która jest okresem podstawowym funkcji $y = \operatorname{tg} x$. Wówczas dla dowolnej liczby x, $x \in \mathbf{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{C}\right\}$, powinna zachodzić równość

$$\operatorname{tg}(x + T_0) = \operatorname{tg} x,$$

więc w szczególności także dla argumentu x_0, gdzie $x_0 = \frac{\pi - T_0}{2}$. Z naszego założenia $0 < T_0 < \pi$ wynika, że liczba $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, wobec tego $\operatorname{tg} x_0 > 0$. Ocenimy teraz znak wartości funkcji tangens dla argumentu $(x_0 + T)$. Mamy

$$x_0 + T_0 = \frac{\pi - T_0}{2} + T_0 = \frac{\pi + T_0}{2},$$

więc wobec założenia $0 < T_0 < \pi$ jest to liczba z przedziału $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Wiadomo, że dla argumentów z przedziału $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tangens jest ujemny, więc

$$\operatorname{tg}(x_0 + T_0) < 0$$

Wobec powyższego:

$\operatorname{tg} x_0 > 0$ i $\operatorname{tg}(x_0 + T_0) < 0$, jeśli $0 < T_0 < \pi$, więc

$\operatorname{tg} x_0 \neq \operatorname{tg}(x_0 + T_0)$

Zatem żadna liczba $0 < T_0 < \pi$ nie jest okresem zasadniczym funkcji tangens, co kończy dowód.

Wniosek:
- Okresem zasadniczym funkcji $y = \sin x$ i $y = \cos x$ jest liczba 2π.
- Okresem zasadniczym funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ jest liczba π.

Przykład 2.

Obliczymy okres zasadniczy funkcji:

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ b) $f(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x - 5\right)$.

Ad a) Oznaczamy okres zasadniczy funkcji f przez T_0. Wówczas

$$f(x + T_0) = \operatorname{tg}\left[3(x + T_0)\right] = \operatorname{tg}(3x + 3T_0)$$

Ale funkcja f jest okresowa, więc zachodzi równość:

$$f(x + T_0) = f(x), \qquad \text{czyli} \qquad \operatorname{tg}(3x + 3T_0) = \operatorname{tg} 3x$$

Wprowadzimy podstawienie:

$$3x = \alpha, \qquad \text{więc} \qquad \operatorname{tg}(\alpha + 3T_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

Okresem zasadniczym funkcji tangens jest π, więc $3T_0 = \pi$, skąd $T_0 = \frac{\pi}{3}$.

Okresem zasadniczym funkcji $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ jest liczba $\frac{\pi}{3}$.

Ad b) Niech T_0 będzie okresem zasadniczym funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x - 5\right)$. Zatem na podstawie równości $f(x + T_0) = f(x)$ mamy:

$$f(x + T_0) = \sin\left[\frac{2}{3}\pi(x + T_0) - 5\right] = \sin\left[\frac{2}{3}\pi x + \frac{2}{3}\pi \cdot T_0 - 5\right] = \sin\left[\frac{2}{3}\pi x - 5 + \frac{2}{3}\pi \cdot T_0\right]$$

$f(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x - 5\right)$, więc

$\sin\left[\left(\frac{2}{3}\pi x - 5\right) + \frac{2}{3}\pi \cdot T_0\right] = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x - 5\right)$. Oznaczamy $\frac{2}{3}\pi x - 5 = \alpha$, skąd

$\sin\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi \cdot T_0\right) = \sin\alpha$

Okresem zasadniczym funkcji sinus jest liczba 2π, wobec tego $\frac{2}{3}\pi \cdot T_0 = 2\pi$, $T_0 = 3$.
Okresem zasadniczym funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x - 5\right)$ jest liczba 3.

Parzystość (nieparzystość) funkcji trygonometrycznych

Przypomnijmy: jeśli dla każdej liczby x z dziedziny D funkcji f spełniony jest warunek $(-x) \in D$ oraz:

$f(-x) = f(x)$, to funkcję f nazywamy funkcją parzystą, jeśli natomiast

$f(-x) = -f(x)$, to funkcję f nazywamy funkcję nieparzystą.

Zatem funkcja $y = \cos x$ jest funkcją parzystą, bo dla dowolnego $x \in \boldsymbol{R}$ argument $-x \in \boldsymbol{R}$ i zachodzi równość

$\cos(-x) = \cos x$

Z tego wynika, że wykres funkcji $y = \cos x$ jest symetryczny względem osi OY.
Ponadto funkcje $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ są funkcjami nieparzystymi, bo dla dowolnego argumentu $x \in D$, argument przeciwny $-x \in D$ i zachodzą równości:

$\sin(-x) = -\sin x, \quad x \in \boldsymbol{R}$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad x \in \boldsymbol{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$

$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in \boldsymbol{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\}$

Zatem wykresy funkcji:

$y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$

są symetryczne względem punktu $O(0, 0)$.

Przykład 1.

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, $x \in \boldsymbol{R}$, jest funkcją nieparzystą.

Założenie: $f(x) = \sin x \cdot \cos x,\ x \in \boldsymbol{R}$

Teza: $\bigwedge_{x \in D} [-x \in D \wedge f(-x) = -f(x)]$

Dowód: Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych, więc dla dowolnego $x \in \boldsymbol{R}$, spełniony jest warunek $(-x) \in \boldsymbol{R}$. Wystarczy zatem wykazać, że zachodzi równość $f(-x) = -f(x)$. Otrzymujemy:

$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x)$, co kończy dowód.

Zbiór wartości funkcji trygonometrycznych

Z definicji funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta możemy wnioskować, że:
- Zbiorem wartości funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ jest przedział liczbowy $\langle -1, 1 \rangle$.
- Zbiorem wartości funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Przykład 3.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $f(x) = \sqrt{2}\sin 3x \quad 1, x \in \boldsymbol{R}$.

Wiemy, że zbiorem wartości funkcji sinus jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$, zatem

$$\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} -1 \leqslant \sin 3x \leqslant 1$$

Nierówność przekształcamy w sposób równoważny:

$$-1 \leqslant \sin 3x \leqslant 1 \quad / \cdot \sqrt{2} \qquad\qquad -\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\sin 3x \leqslant \sqrt{2} \quad / -1$$

$$-\sqrt{2} - 1 \leqslant \sqrt{2}\sin 3x - 1 \leqslant \sqrt{2} - 1, \quad \text{stąd} \quad -\sqrt{2} - 1 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{2} - 1.$$

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \sqrt{2}\sin 3x - 1$ jest przedział liczbowy $\langle -\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1 \rangle$.

Przykład 4.

Określimy zbiór wartości funkcji $f(x) = 1 - \operatorname{ctg}^2 x, \quad x \in \boldsymbol{R} - \{x\colon x = k\pi, k \in \boldsymbol{C}\}$.

Wiemy, że zbiorem wartości funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Zatem funkcja $y = \operatorname{ctg}^2 x$ przyjmuje tylko wartości nieujemne, więc jej zbiorem wartości jest przedział $\langle 0, +\infty)$. Z kolei funkcja $y = -\operatorname{ctg}^2 x$ przyjmuje wartości przeciwne do wartości funkcji $y = \operatorname{ctg}^2 x$, więc jej zbiór wartości jest przedziałem $(-\infty, 0\rangle$. Możemy więc zapisać: $-\operatorname{ctg}^2 x \leqslant 0$. Dodając do obu stron nierówności 1 mamy:

$$1 - \operatorname{ctg}^2 x \leqslant 1$$

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 1 - \operatorname{ctg}^2 x$ jest przedział $(-\infty, 1\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz: $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

2. Wykaż, że funkcja określona wzorem:
   a) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ jest parzysta
   b) $f(x) = 4\sin^2 x + 3$ jest parzysta
   c) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ jest nieparzysta
   d) $f(x) = \sin x + \cos x$ nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

3. Wyznacz zbiór wartości funkcji
   a) $f(x) = \sqrt{2}\cos 3x - 2, \quad x \in \boldsymbol{R}$
   b) $f(x) = 5\sin^2 x + 1, \quad x \in \boldsymbol{R}$

Wykresy funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$

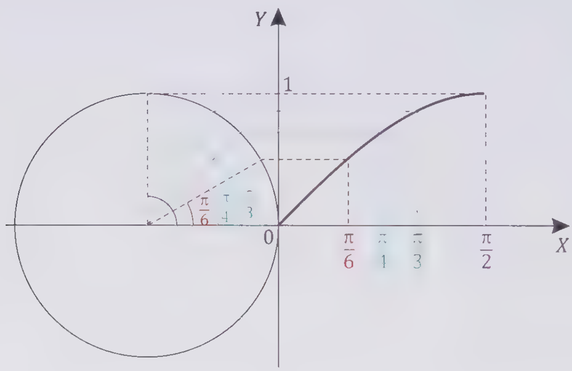
Wiedza, jaką zdobyłeś na poprzednich lekcjach, jest wystarczająca do naszkicowania wykresów funkcji trygonometrycznych.

A) Wykres funkcji $y = \sin x$

Wiesz, że funkcja $y = \sin x$ jest określona wtedy, gdy $x \in \boldsymbol{R}$, a zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle -1, 1\rangle$. Wykres funkcji $y = \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$, będziemy szkicować etapami.

<u>I etap</u>

Do naszkicowania wykresu funkcji $y = \sin x$, jeśli $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, wykorzystamy koło trygonometryczne.



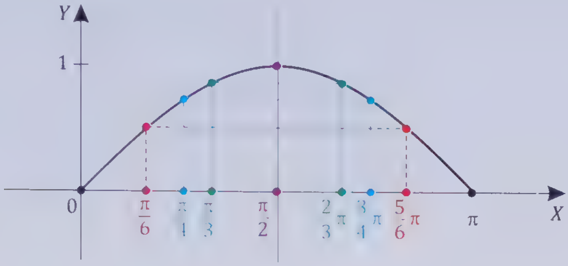
<u>II etap</u>

Ze wzoru redukcyjnego $\sin(\pi - x) = \sin x$ wynika, że wykres funkcji $y = \sin x$ jest symetryczny względem prostej równoległej do osi OY i przechodzącej przez punkt o współrzędnych $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Istotnie:

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

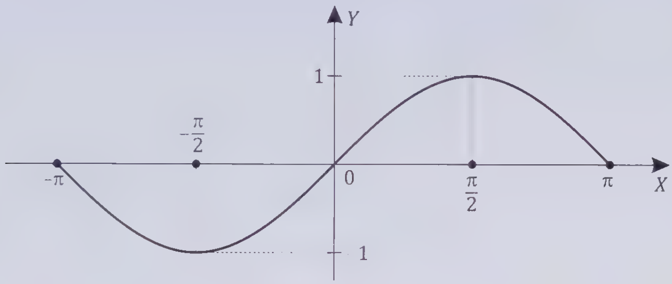
$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{itd.}$$

Po skorzystaniu z tej własności otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$.



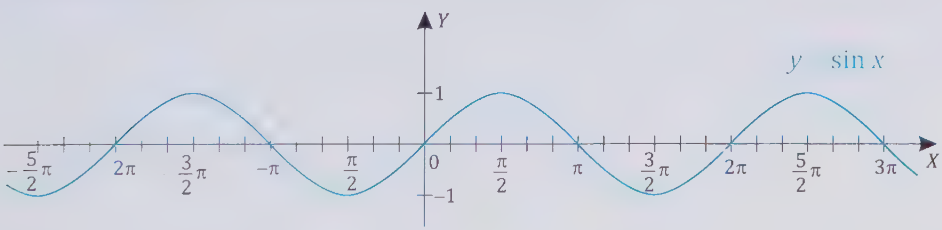
III etap

Funkcja $y = \sin x$ jest nieparzysta, zatem jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Możemy więc dorysować wykres funkcji w przedziale $\langle -\pi, 0\rangle$. Otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin x$ na przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$, mającym długość 2π.



IV etap

Okres zasadniczy funkcji $y = \sin x$ wynosi 2π. Powielając fragment wykresu funkcji uzyskany w etapie III, otrzymujemy wykres funkcji $y = \sin x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Podsumujemy własności funkcji $y = \sin x$:

- dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$;
- zbiorem wartości jest przedział $\langle -1, 1\rangle$;
- jest to funkcja okresowa o okresie podstawowym 2π;
- jest to funkcja nieparzysta;
- miejsca zerowe funkcji to liczby mające postać: $k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$;
- funkcja przyjmuje największą wartość (równą 1) wtedy, gdy $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$;
- funkcja przyjmuje najmniejszą wartość (równą -1) wtedy, gdy $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$;
- funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left\langle \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \boldsymbol{C}$;

- funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle$, $k \in C$;
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in C$;
- funkcja przyjmuje wartości ujemne w przedziałach $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in C$;
- funkcja nie jest różnowartościowa; jest natomiast różnowartościowa w każdym z przedziałów, w którym jest monotoniczna (rosnąca lub malejąca).

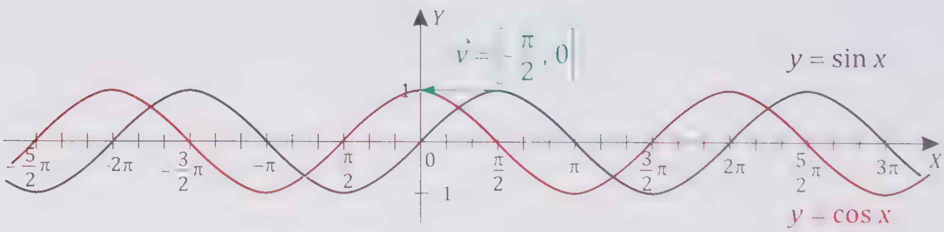
B) Wykres funkcji $y = \cos x$

Funkcja $y = \cos x$, podobnie jak funkcja $y = \sin x$, określona jest w zbiorze liczb rzeczywistych, o wartościach w przedziale $\langle -1, 1\rangle$. Jej wykres można otrzymać po przeprowadzeniu analogicznych rozważań jak w przypadku funkcji $y = \sin x$, szkicując go etapami. Wykres funkcji $y = \cos x$ możemy też uzyskać szybciej, korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ i przekształceń wykresów funkcji, które poznałeś w klasie pierwszej. Wiemy, że

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

zatem wykres funkcji $y = \cos x$ otrzymamy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$$y = \sin x \quad \text{o wektor} \quad \vec{v} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$



Korzystając z wykresu, spróbuj opisać własności funkcji $y = \cos x$.

Poniższe przykłady ilustrują zastosowanie wykresów funkcji $y = \sin x$ i $y = \cos x$ w prostych zadaniach.

Przykład 1.

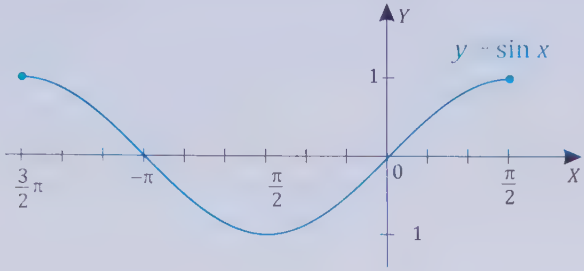
Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \sin x$ w przedziale $\left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, a następnie na podstawie wykresu podamy:

a) miejsca zerowe funkcji f;

b) zbiór argumentów, dla których wartość funkcji f wynosi $\frac{-\sqrt{2}}{2}$;

c) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe lub równe $\frac{1}{2}$.

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \sin x$, jeśli $x \in \left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



Ad a) $\left[\sin x = 0 \wedge x \in \left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right] \Leftrightarrow x \in \{-\pi, 0\}$

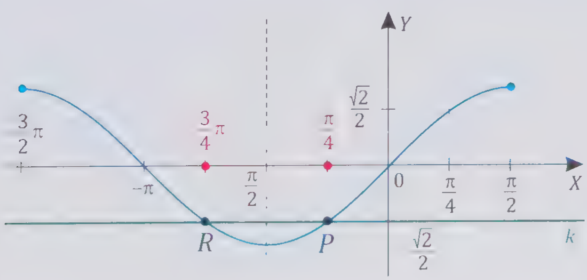
Zatem miejscami zerowymi funkcji f są liczby $-\pi$ oraz 0.

Ad b) Wiemy, że jeśli $x = \frac{\pi}{4}$, to wartość funkcji $f(x) = \sin x$ wynosi $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ponieważ funkcja jest nieparzysta, więc dla argumentu przeciwnego $-\frac{\pi}{4}$ wartość funkcji f będzie równa

$$\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Najpierw zaznaczymy na wykresie funkcji f punkt $P\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, przez który poprowadzimy prostą k równoległą do osi OX. Prosta k przecina wykres funkcji f jeszcze w punkcie R.

Odcięta punktu R jest drugim argumentem, dla którego wartość funkcji f wynosi $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.



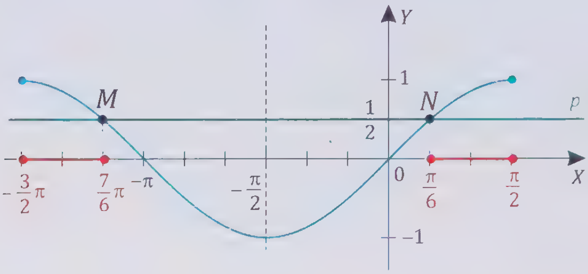
Ponieważ punkty P i R są symetryczne względem prostej prostopadłej do osi OX przechodzącej przez punkt $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$, więc odcięta punktu R jest równa $\pi + \frac{\pi}{4}$, czyli

$-\frac{3}{4}\pi$. W przedziale $\left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ funkcja $y = \sin x$ wartość $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ przyjmuje dla dwóch argumentów:

$$\frac{-\pi}{4} \text{ oraz } \frac{-3\pi}{4}.$$

Ad c) Prowadzimy prostą p równoległą do osi OX przechodzącą przez punkt $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Prosta p ma z wykresem funkcji f dwa punkty wspólne M i N, których rzędna wynosi $\frac{1}{2}$.



Z wykresu odczytujemy odcięte punktów:

– odcięta punktu N jest równa $\frac{\pi}{6}$, bo $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

– odcięta punktu M jest równa $-\pi - \frac{\pi}{6}$, czyli $\frac{-7\pi}{6}$ (bo wykres jest symetryczny względem prostej prostopadłej do osi OX przechodzącej przez punkt $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$).

Teraz odczytujemy z wykresu zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe lub równe $\frac{1}{2}$ (zaznaczyliśmy je kolorem niebieskim). Zatem:

$$\left[\sin x \geqslant \frac{1}{2} \wedge x \in \left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle\right] \Leftrightarrow x \in \left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{-7\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

Przykład 2.

Porównamy liczby $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\sin\left(\cos\frac{3}{4}\pi\right)$.

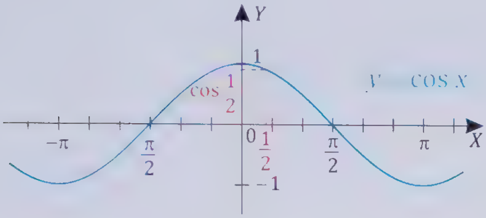
Wiadomo, że $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ oraz $\cos\frac{3}{4}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Wystarczy zatem porównać liczby $\cos\frac{1}{2}$ oraz $\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$. Na podstawie wykresu funkcji $y = \cos x$

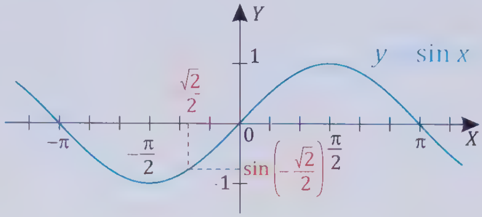
stwierdzamy, że

$$\cos\frac{1}{2} > 0,$$

a na podstawie wykresu funkcji $y = \sin x$ wiemy, że

$\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ (zobacz poniższy rysunek).

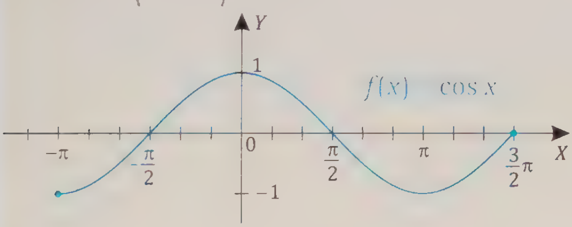




Stąd $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) > \sin\left(\cos\frac{3}{4}\pi\right)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na poniższym rysunku naszkicowany jest wykres funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $\left\langle -\pi, \frac{3}{2}\pi \right\rangle$.



Na podstawie wykresu funkcji f podaj:

a) przedziały monotoniczności funkcji;
b) miejsca zerowe funkcji;
c) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie:
d) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne;
e) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość równą $-0{,}5$;
f) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nie mniejsze niż $-0{,}5$.

2. Określ, jaką wartość: dodatnią czy ujemną ma wyrażenie:

$$\frac{\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \sin 1}{\sin 4 \cdot \sin(-3)}.$$

3. Określ znak liczby $\sin(\cos 5)$.

Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$

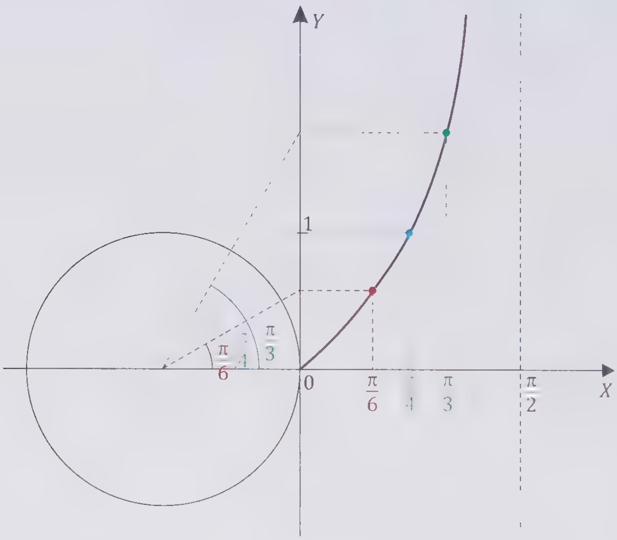
Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ naszkicujemy, podobnie jak wykres funkcji $y = \sin x$, stosując koło trygonometryczne oraz poznane do tej pory własności funkcji tangens.
Wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ otrzymamy z wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ po pewnych przekształceniach.

A) Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$

Dziedziną funkcji $y = \operatorname{tg} x$ jest zbiór $\boldsymbol{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$

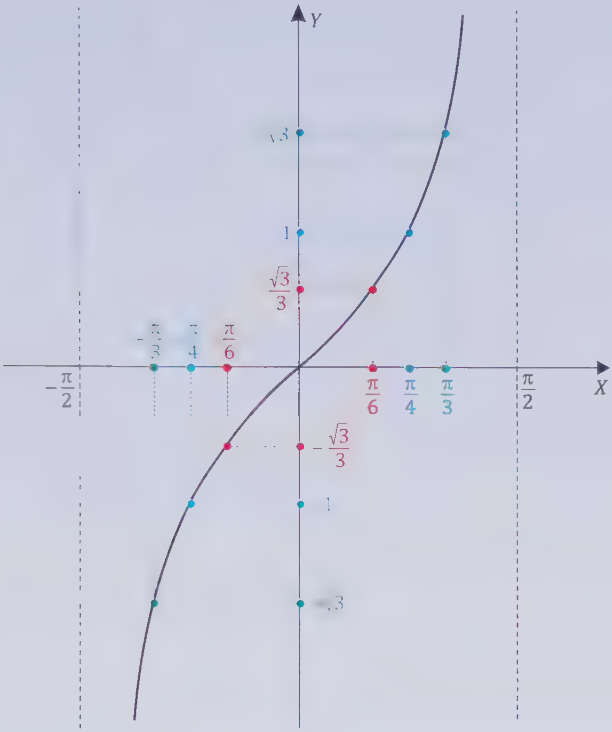
<u>I etap</u>

Do naszkicowania wykresu funkcji, dla argumentów $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$, posłużymy się kołem trygonometrycznym.



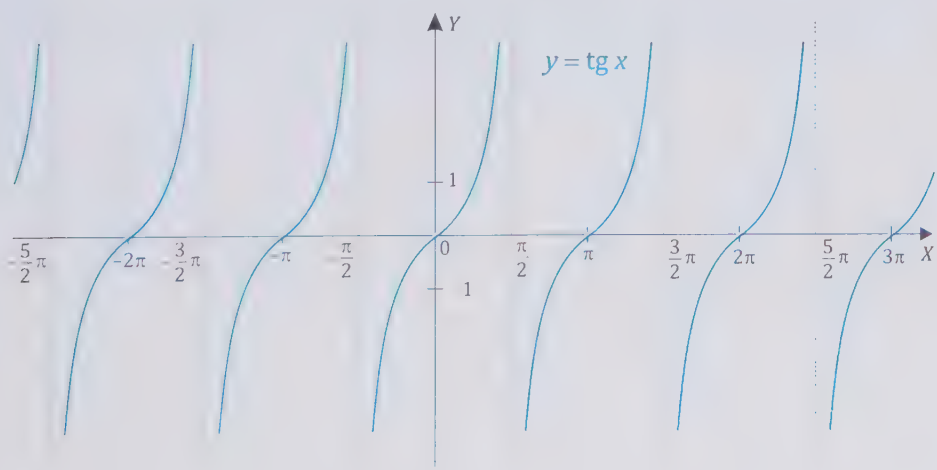
<u>II etap</u>

Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest nieparzysta, zatem jej wykres w przedziale $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right\rangle$ otrzymamy po przekształceniu naszkicowanego w I etapie fragmentu wykresu przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.



III etap

Zauważ, że otrzymaliśmy wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w przedziale mającym długość π. Okres zasadniczy funkcji tangens też jest równy π. Jeśli więc powielimy tę część wykresu, to otrzymamy cały wykres funkcji tangens.



Własności funkcji $y = \operatorname{tg} x$:

- dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$;
- zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$;
- jest to funkcja okresowa o okresie zasadniczym π;
- jest to funkcja nieparzysta;
- miejsca zerowe to liczby mające postać: $k\pi$, $k \in \mathbf{C}$;
- funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \boldsymbol{C}$;

UWAGA: Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ nie jest rosnąca w całej dziedzinie!

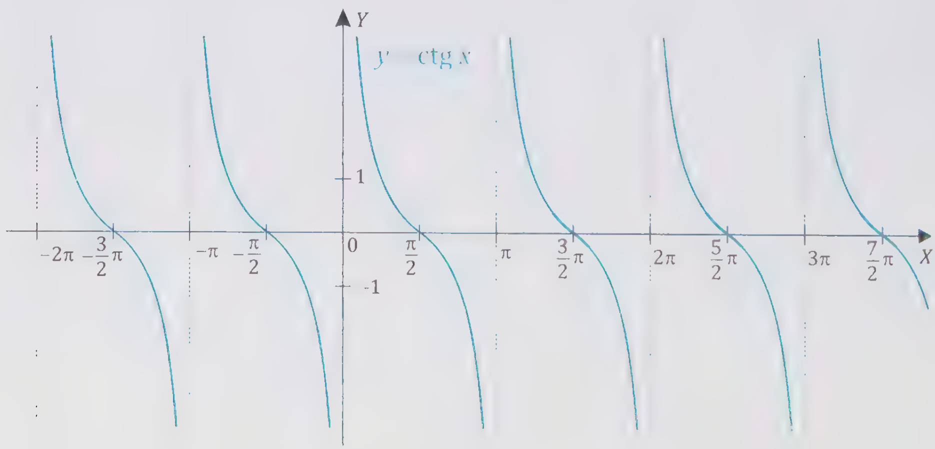
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \boldsymbol{C}$;
- funkcja przyjmuje wartości ujemne w przedziałach $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$, $k \in \boldsymbol{C}$;
- funkcja nie jest różnowartościowa; jest natomiast różnowartościowa w każdym z przedziałów, w którym jest rosnąca.

B) Wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$, zatem $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\}$.

Zatem wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ możemy otrzymać z wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$, wykonując kolejno następujące przekształcenia: przesunąć równolegle wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ o wektor $\vec{u} = \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$, a następnie otrzymany wykres przekształcić przez symetrię osiową względem osi OX (czy otrzymamy ten sam wykres, stosując powyższe przekształcenia w odwrotnej kolejności?).

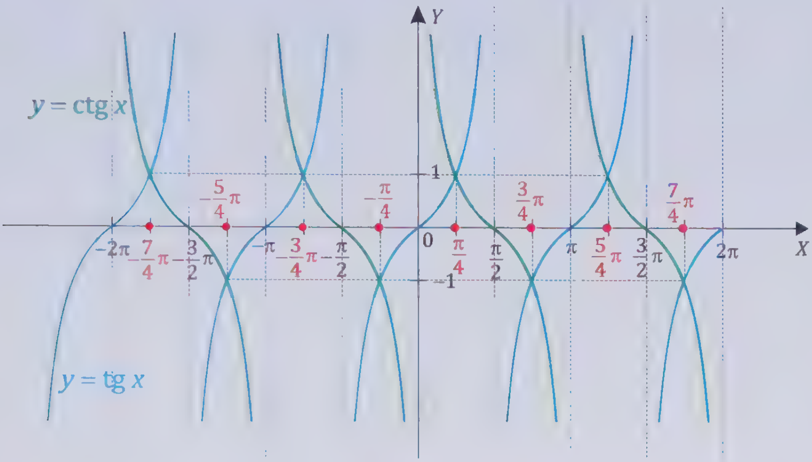
Wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ przedstawiony jest poniżej.



Spróbuj opisać własności funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ na podstawie wykresu.

Przykład 1.

Wyznaczymy zbiór tych argumentów, dla których funkcje $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$ przyjmują tę samą wartość.
W tym celu, we wspólnym układzie współrzędnych, naszkicujemy wykresy obu funkcji.



Z wykresu odczytujemy, że obie funkcje przyjmują tę samą wartość równą 1 lub −1 dla argumentów:

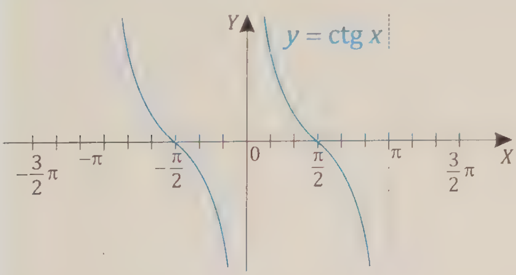
$$\ldots, -\frac{7}{4}\pi, -\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \ldots \text{ itd.}$$

Ponieważ odległości pomiędzy interesującymi nas argumentami są stałe i wynoszą $\frac{\pi}{2}$, więc odpowiedź zapiszemy krócej: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{C}$.

Funkcje $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ przyjmują tę samą wartość dla argumentów $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{C}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.



Na podstawie wykresu funkcji podaj:
a) Zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość $\sqrt{3}$.
b) Zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od −1.
c) Znak wartości wyrażenia

$$\operatorname{ctg} 2 \cdot \operatorname{ctg}(-2{,}5) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych

Znasz wykresy funkcji trygonometrycznych. Umiesz z wykresu odczytać własności funkcji. Potrafisz także przekształcać wykresy różnych funkcji.
W tym temacie połączymy umiejętności, jakie zdobyłeś na poprzednich lekcjach.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$. Odczytamy z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

Aby naszkicować wykres funkcji f, najpierw przekształcimy jej wzór do postaci:

$$f(x) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Wykres funkcji f powstaje na podstawie wykresu funkcji $y = \sin x$, w wyniku następujących przekształceń:

1) $f_1(x) = \sin x$

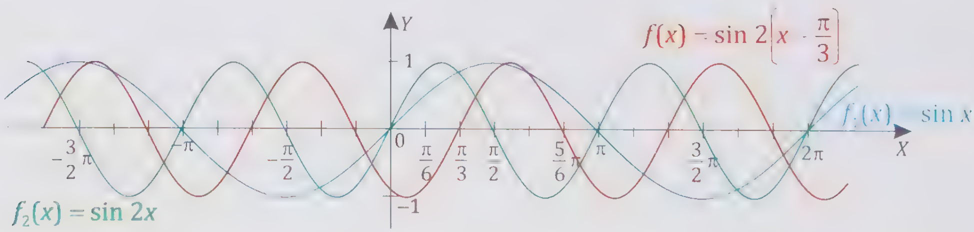
   $f_2(x) = f_1(2x)$ – powinowactwo prostokątne wykresu funkcji f_1 o osi OY i skali $\frac{1}{2}$

2) $f_2(x) = \sin 2x$

   $f(x) = f_2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ – translacja wykresu funkcji f_2 o wektor $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{3}, 0\right]$

3) $f(x) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Wykres funkcji f przedstawia poniższy rysunek.



Z wykresu odczytujemy:

$$f(x) > 0 \iff x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\right), k \in \mathbf{C}$$

Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = |1{,}5\cos x - 1|$, gdzie $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Wykres funkcji f powstaje w wyniku następujących przekształceń:

1) $f_1(x) = \cos x$

   $f_2(x) = 1{,}5 f_1(x)$ – powinowactwo prostokątne wykresu funkcji f_1 o osi OX w skali 1,5

2) $f_2(x) = 1{,}5\cos x$

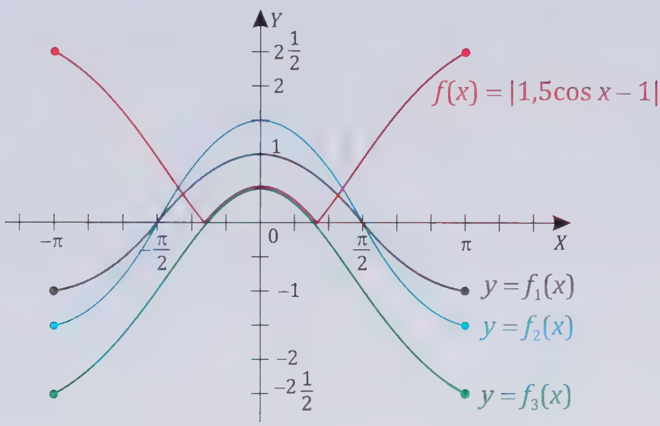
   $f_3(x) = f_2(x) - 1$ – przesunięcie równoległe wykresu funkcji f_2 o wektor $\vec{u} = [0, -1]$

3) $f_3(x) = 1{,}5\cos x - 1$

   $f(x) = |f_3(x)|$ – symetria względem osi OX części wykresu znajdującej się poniżej osi OX

4) $f(x) = |1{,}5\cos x - 1|$

Poniższy rysunek przedstawia kolejne etapy powstawania wykresu funkcji f.



Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \dfrac{\cos x}{|\sin x|}$, gdzie $x \in (-\pi, 2\pi) - \{0, \pi\}$. Odczytamy z wykresu, dla jakich argumentów zachodzi warunek $f(x) = 1$.

Z definicji wartości bezwzględnej i własności funkcji $y = \sin x$ wiemy, że:

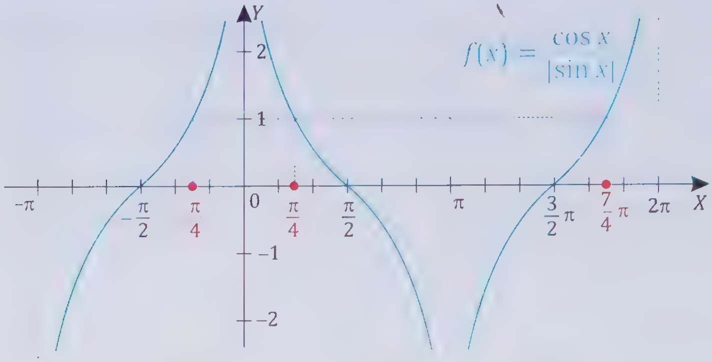
$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, \text{ jeśli } x \in (0, \pi) \\ -\sin x, \text{ jeśli } x \in (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Ponadto, z podstawowych związków między funkcjami trygonometrycznymi wynika, że $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, gdzie $\sin x \neq 0$, więc wzór funkcji f możemy zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, \text{ jeśli } x \in (0, \pi) \\ -\operatorname{ctg} x, \text{ jeśli } x \in (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = -\operatorname{ctg} x$ powstaje przez odbicie symetryczne wykresu funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ względem osi OX.

Wykres funkcji *f* przedstawiony jest na poniższym rysunku.

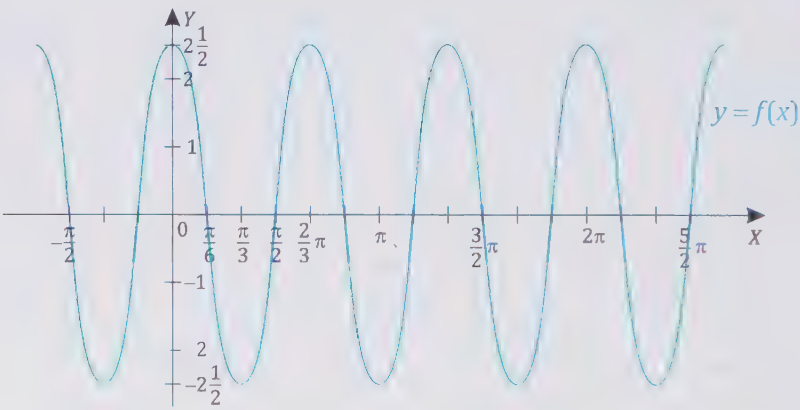


Z wykresu odczytujemy, że

$$f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Przykład 4.

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji $f(x) = a \cdot \sin[b(x + c)]$. Korzystając z danych na wykresie oraz wiedząc, że liczby a, b, c są dodatnie, ustalimy wzór funkcji f.



Wzór $f(x) = a \cdot \sin[b(x + c)]$ sugeruje, że wykres funkcji f powstał z wykresu funkcji $y = \sin x$ w wyniku przekształcenia go przez powinowactwo prostokątne o osi OX oraz powinowactwo prostokątne o osi OY, a także wyniku przesunięcia równoległego o wektor $\vec{u} = [-c, 0]$. Na podstawie rysunku ustalimy te przekształcenia.

- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\rangle$, zatem wykres funkcji f powstał przez powinowactwo prostokątne wykresu funkcji $y = \sin x$ o osi OX i skali $2\frac{1}{2}$; zatem

  $$a = 2\frac{1}{2}$$

- Fragment wykresu funkcji f, który odpowiada argumentom z przedziału $\left\langle 0, \frac{2}{3}\pi \right\rangle$, powtarza się cyklicznie, więc wnioskujemy, że okresem podstawowym funkcji f jest liczba $\frac{2}{3}\pi$, czyli

$$T_0 = \frac{2}{3}\pi$$

Fakt ten pozwala nam obliczyć współczynnik b. Wiemy, że okresem podstawowym funkcji sinus jest 2π, zatem:

$$\frac{2\pi}{b} = T_0 \qquad b = \frac{2\pi}{T_0} \qquad b = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}, \text{ więc}$$

$$b = 3$$

Pozostało nam wyznaczenie współczynnika c.

Wykres funkcji f powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = 2{,}5 \cdot \sin 3x$ o wektor $\vec{u} = \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$, zatem $c = \frac{\pi}{6}$ $\left(\frac{\pi}{6}\right.$ jest najmniejszą liczbą dodatnią spełniającą warunki zadania$\left.\right)$.

Ostatecznie, funkcja f, której wykres przedstawiony jest na powyższym rysunku, opisana jest wzorem:

$$f(x) = 2{,}5 \cdot \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. We wspólnym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = |\cos x| - 1$ oraz $g(x) = \sin x$, gdzie $x \in \left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Na podstawie rysunku odpowiedz na pytania.
   a) Dla jakich argumentów obie funkcje, w danym przedziale, przyjmują tę samą wartość?
   b) Dla jakich argumentów z przedziału $\left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ funkcja g przyjmuje większe wartości niż funkcja f?
2. Sporządź wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \sin x - |\sin x|$, $x \in \boldsymbol{R}$. Następnie:
   a) podaj zbiór wartości funkcji f;
   b) określ zbiór miejsc zerowych funkcji f;
   c) wskaż okres podstawowy funkcji f;
   d) odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

Proste równania trygonometryczne

Rozważmy równanie

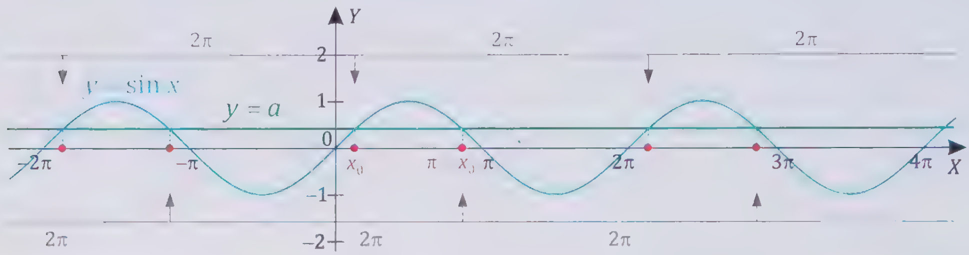
$\sin x = a$

Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Rozwiązania tego równania istnieją tylko wtedy, gdy

$a \in \langle -1, 1 \rangle$

W jednym układzie współrzędnych naszkicujmy wykresy funkcji

$y = \sin x$ i $y = a$, $a \in \langle -1, 1\rangle$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Równanie $\sin x = a$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Te rozwiązania można wygodnie zapisać w dwóch seriach. Wybieramy dowolne rozwiązanie x_0 (np. najmniejsze dodatnie). Zauważmy, że w odległości $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ od x_0 też znajdują się rozwiązania tego równania. Zatem serię rozwiązań wyznaczoną przez x_0 można zapisać tak:

$x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$.

Drugą serię rozwiązań wyznacza rozwiązanie $\pi - x_0$. Mamy więc:

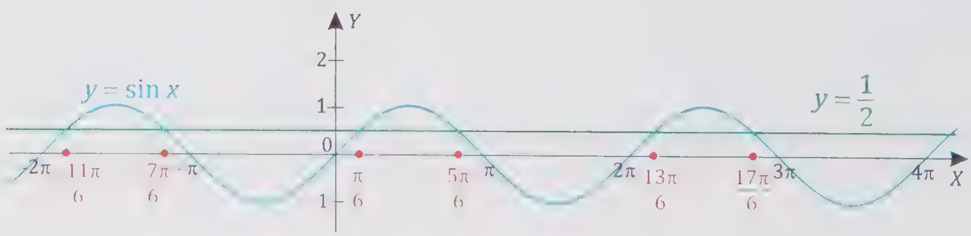
$\pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 1.

Rozwiążemy równania:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{-1}{2}$

Ad a) Szkicujemy wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \frac{1}{2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Ponieważ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc jeśli

$\sin x = \frac{1}{2}$, to

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in C \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in C$

Ad b) Możemy postąpić podobnie, jak w punkcie a), lub wykorzystać nieparzystość funkcji sinus. Wówczas mamy $\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$. Zatem

$\sin x = \frac{-1}{2}$

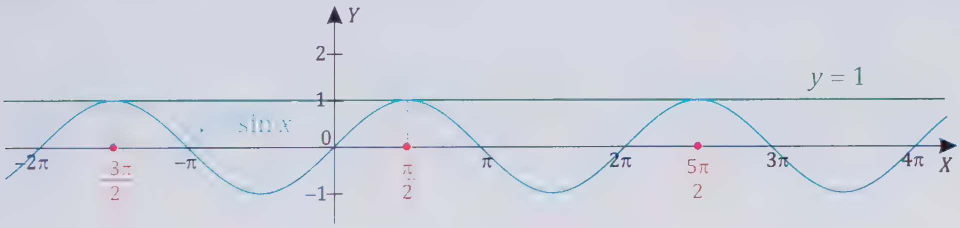
$x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in C \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in C$

Przykład 2.

Rozwiążemy równania:

a) $\sin x = 1$ b) $\sin x = 0$ c) $\sin x = -1$

Ad a)

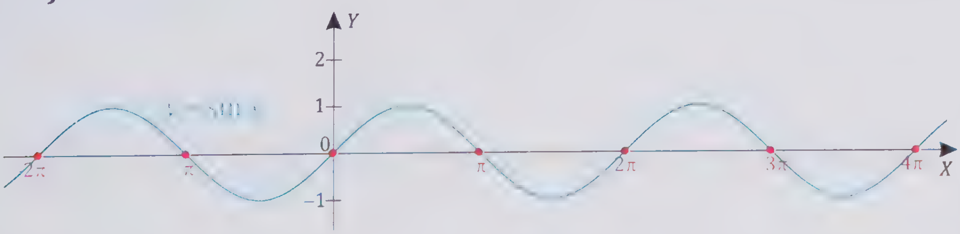


W tym przypadku obie serie z rozwiązania ogólnego się pokrywają. Mamy więc

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in C$

Ad b)



Otrzymujemy

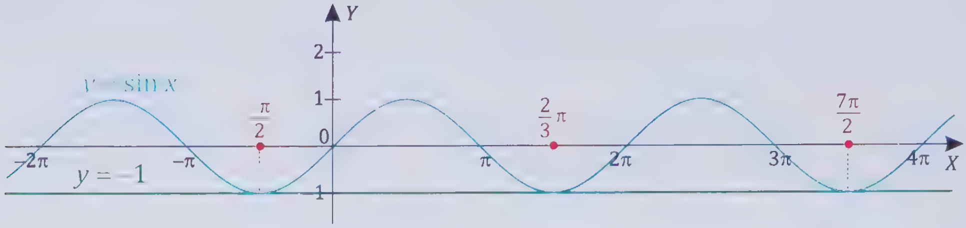
$\sin x = 0$

$x = 0 + 2k\pi,\ k \in C \quad \vee \quad x = \pi + 2k\pi,\ k \in C$

W tym przypadku rozwiązania wygodniej jest zapisać za pomocą jednej serii.

$x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

Ad c)



Mamy:

$\sin x = -1$

$x = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których równanie

$2\sin x = 4m - \sin x + 5$

ma rozwiązanie.

Przekształcimy dane równanie w sposób równoważny do postaci $\sin x = a$, $a \in \boldsymbol{R}$.
Mamy:

$2\sin x = 4m - \sin x + 5$

$3\sin x = 4m + 5$

$\sin x = \dfrac{4m+5}{3}$

Równanie $\sin x = a$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \langle -1, 1\rangle$.
Zatem:

$-1 \leqslant \dfrac{4m+5}{3} \leqslant 1 \quad / \cdot 3$

$-3 \leqslant 4m + 5 \leqslant 3 \quad / -5$

$-8 \leqslant 4m \leqslant -2 \quad / : 4$

$-2 \leqslant m \leqslant \dfrac{-1}{2}$

Równanie $2\sin x = 4m - \sin x + 5$ ma rozwiązanie wtedy, gdy $m \in \left\langle -2, \dfrac{-1}{2} \right\rangle$.

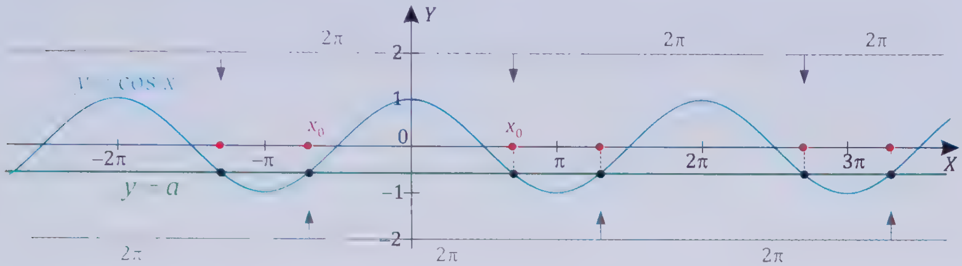
Rozważmy równanie

$\cos x = a$

Dziedziną tego równania jest $\boldsymbol{R}$. Jeśli $a \in \langle -1, 1\rangle$, to równanie ma rozwiązania, w przeciwnym wypadku – nie ma rozwiązań.

W jednym układzie współrzędnych naszkicujmy wykresy funkcji

$y = \cos x$ i $y = a$, $a \in \langle -1, 1\rangle$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



W tym przypadku rozwiązania wygodnie jest zapisać w postaci dwóch serii:

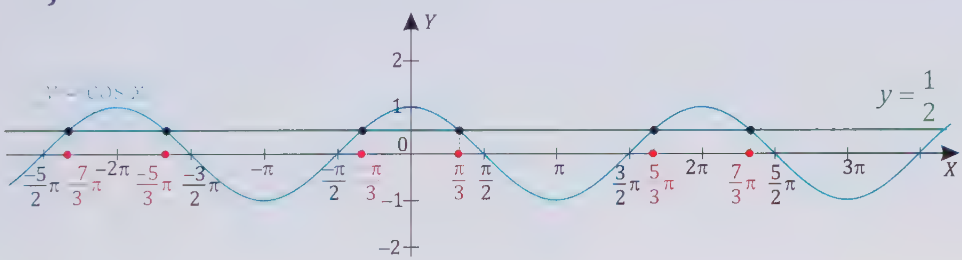
$x_0 + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$ oraz $-x_0 + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 4.

Rozwiążemy równania:

a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ b) $\cos x = \dfrac{-1}{2}$

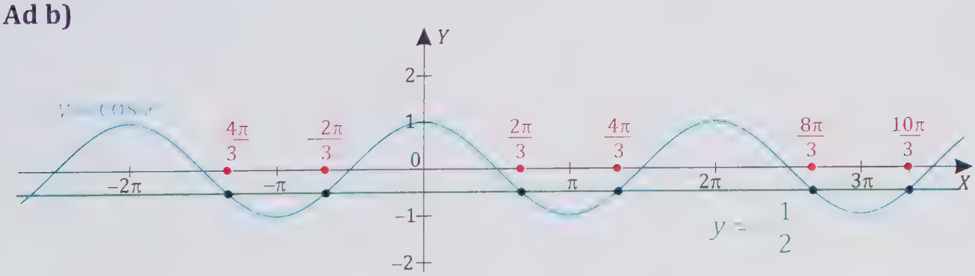
Ad a)



$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Ad b)



$$\cos x = \frac{-1}{2}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

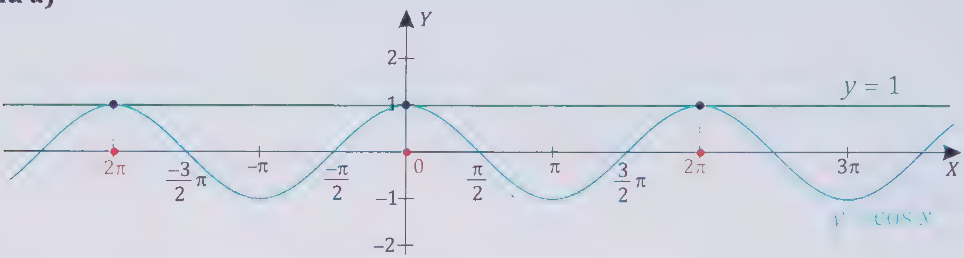
UWAGA: Funkcja cosinus jest funkcją parzystą, więc $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, nie możemy sobie zatem ułatwić rozwiązania tego równania, jak w przypadku funkcji sinus, która jest nieparzysta (zobacz przykład 1 b).

Przykład 5.

Rozwiążemy równania:

a) $\cos x = 1$ b) $\cos x = 0$ c) $\cos x = -1$

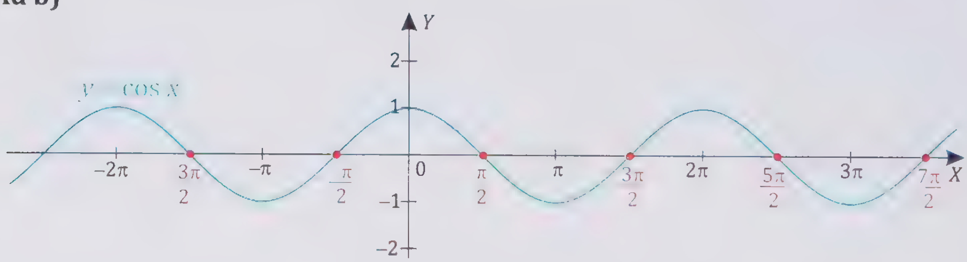
Ad a)



$\cos x = 1$

$x = 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

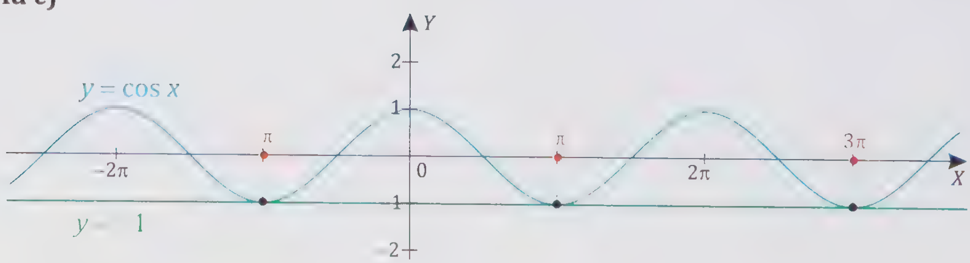
Ad b)



$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

Ad c)



$\cos x = -1$

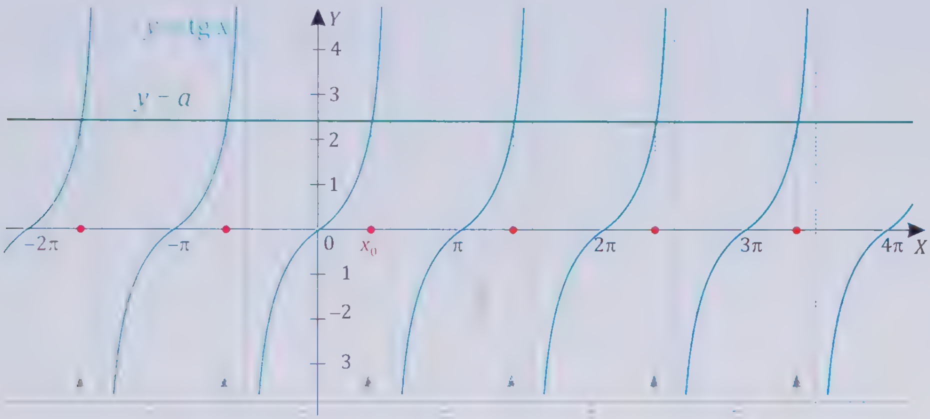
$x = \pi + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

Rozpatrzymy jeszcze dwa typy równań. Pierwszy to:

$\operatorname{tg} x = a$

Do dziedziny równania nie należą liczby mające postać $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$. Dla każdej liczby a równanie ma rozwiązania. We wspólnym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbf{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C}\right\} \quad \text{oraz} \quad y = a, \quad x \in \mathbf{R}.$$



Kolejne rozwiązania są oddalone od siebie o π. Możemy je więc zapisać w postaci jednej serii.

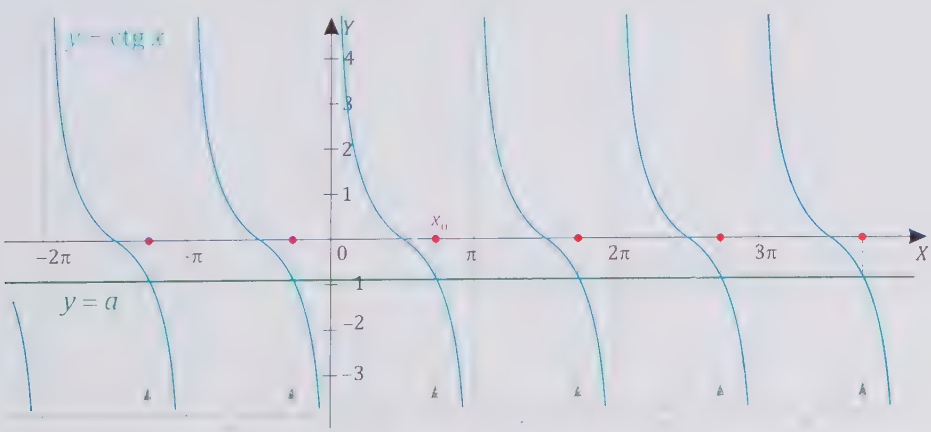
$x_0 + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$

Ostatnim typem równania, który przeanalizujemy, jest

$\operatorname{ctg} x = a$

Do dziedziny tego równania nie należą liczby mające postać $\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{C}$. Dla każdej liczby a równanie ma rozwiązania. We wspólnym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji

$y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbf{R} - \{x\colon x = \pi + k\pi, k \in \mathbf{C}\}$ oraz $y = a$, $x \in \mathbf{R}$.



Kolejne rozwiązania są również oddalone od siebie o π. Możemy je też zapisać w postaci jednej serii.

$x_0 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

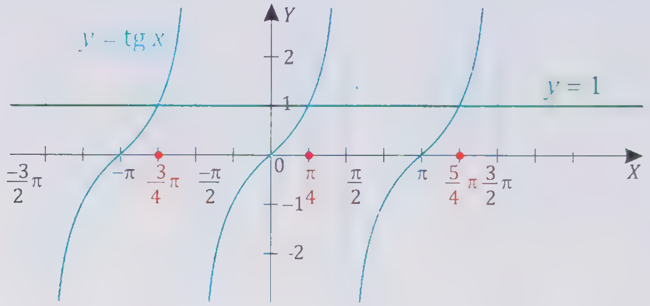
Przykład 6.

Rozwiążemy równania:

a) $\operatorname{tg} x = 1$ b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ c) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ d) $\operatorname{ctg} x = -1$

Dziedziną równania $\operatorname{tg} x = 1$ oraz $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ jest zbiór $\boldsymbol{R} - \left\{x \colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$.

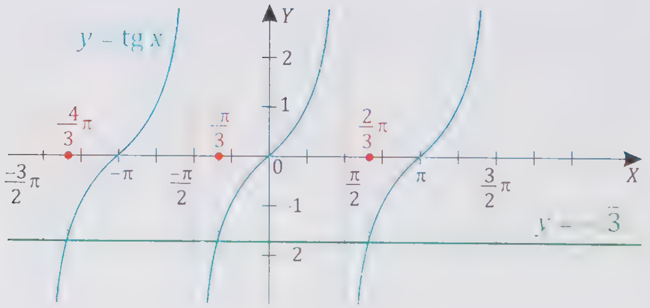
Ad a)



$\operatorname{tg} x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

Ad b)

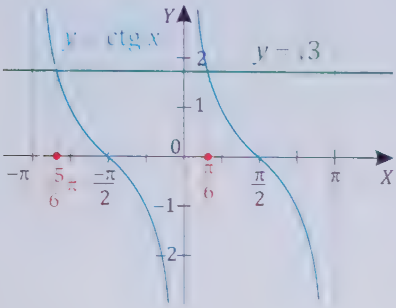


$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$x = \frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

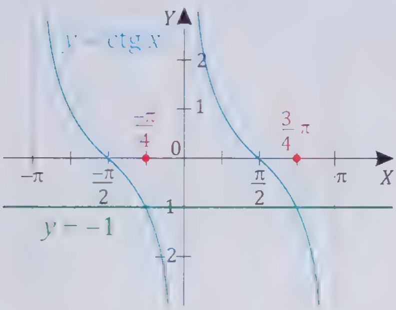
Równania $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ oraz $\operatorname{ctg} x = -1$ są określone wtedy, gdy $x \neq k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$. Rozwiązania obu równań przedstawione są poniżej.

Ad c)



$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Ad d)



$$\operatorname{ctg} x = -1 \iff x = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:

   a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

   d) $\cos x = 2$ e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

   g) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\operatorname{tg} x = 0$ i) $\operatorname{ctg} x = 1$

2. Ile rozwiązań ma równanie $\sin x = 0{,}75$ w zbiorze $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$?

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), dla których poniższe równania mają rozwiązania:

   a) $\sin x = \frac{m+1}{4}$ b) $\cos x = \frac{-3m+1}{2}$

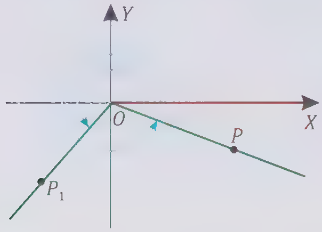
   c) $\sqrt{3}\sin x = 2\sin x - m + 1$ d) $\frac{\cos x}{m+2} = \frac{3}{2}$

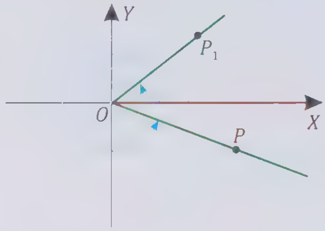
Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy

Niech α i β będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Liczbom tym odpowiadają dwa kąty skierowane, które umieszczamy w układzie współrzędnych tak, aby początkowe ramię każdego z tych kątów pokrywało się z dodatnią półosią OX. Na końcowym ramieniu kąta o mierze α wybieramy punkt $P(x, y)$, a na końcowym ramieniu kąta o mierze β – punkt $P_1(x_1, y_1)$. Punkty P i P_1 nie leżą w początku układu współrzędnych.

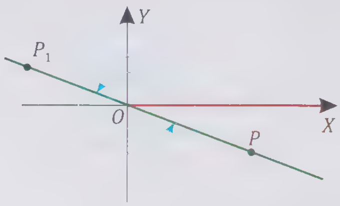
Możliwe są następujące trzy przypadki.

I. Końcowe ramiona kątów α, β wyznaczają kąt trójkąta POP_1.

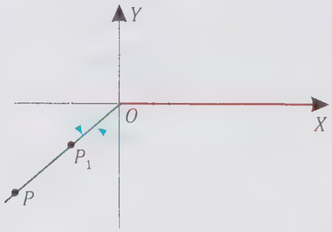




II. Końcowe ramiona kątów α, β uzupełniają się do prostej.



III. Końcowe ramiona kątów α, β się pokrywają.



<u>I przypadek</u>

Kąt między bokami OP i OP_1 ma miarę

$|\alpha - \beta| + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \boldsymbol{C}$ albo

$-|\alpha - \beta| + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \boldsymbol{C}$

W każdym przypadku cosinus tego kąta jest równy

$\cos(\alpha - \beta)$ (sprawdź!)

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta POP_1. Mamy:

$$|PP_1|^2 = |OP|^2 + |OP_1|^2 - 2 \cdot |OP| \cdot |OP_1| \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

Wyznaczamy $\cos(\alpha - \beta)$.

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{|OP|^2 + |OP_1|^2 - |PP_1|^2}{2 \cdot |OP| \cdot |OP_1|}$$

Ponieważ

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad |OP_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad |PP_1| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}, \text{ więc}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} =$$

$$= \frac{2(x \cdot x_1 + y \cdot y_1)}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} =$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Otrzymaliśmy zatem wzór

(*) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Sprawdzimy, czy wzór (*) jest też prawdziwy w przypadku II i III.

<u>II przypadek</u>

Przypadek ten zachodzi tylko wtedy, gdy $\alpha - \beta = \pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \boldsymbol{C}$. Stąd

$\alpha = \beta + \pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \boldsymbol{C}$.

Obliczamy:

$$L = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\pi + 2k\pi) = -1$$

$$P = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\beta + \pi + 2k\pi) \cdot \cos\beta + \sin(\beta + \pi + 2k\pi) \cdot \sin\beta =$$

$$= (-\cos\beta) \cdot \cos\beta + (-\sin\beta) \cdot \sin\beta = -\cos^2\beta - \sin^2\beta = -1$$

$$L = P$$

W przypadku drugim wzór (*) jest też prawdziwy.

<u>III przypadek</u>

Przypadek ten zachodzi tylko wtedy, gdy $\alpha - \beta = 2k\pi$ dla pewnego $k \in \boldsymbol{C}$. Zatem

$\alpha = \beta + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \boldsymbol{C}$.

Obliczamy:

$$L = \cos(\alpha - \beta) = \cos(2k\pi) = 1$$

$$P = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\beta + 2k\pi) \cdot \cos\beta + \sin(\beta + 2k\pi) \cdot \sin\beta =$$

$$= \cos\beta \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \sin\beta = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

$$L = P$$

W przypadku trzecim wzór (*) jest również prawdziwy.

Wzór (*) jest prawdziwy dla dowolnych liczb rzeczywistych α, β.

Jeśli teraz we wzorze (*) podstawimy $(-\beta)$ w miejsce β, to otrzymamy wzór na cosinus sumy α i β.

$$\cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) =$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Jeśli natomiast we wzorze (*) zamiast α wstawimy $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, to powstanie wzór na sinus sumy α i β.

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Po wstawieniu w ostatnim wzorze $(-\beta)$ zamiast β otrzymamy wzór na sinus różnicy α i β.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, to:

a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

d) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Przykład 1.

Obliczymy $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Zauważmy, że

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6},$$

więc na mocy twierdzenia 1a otrzymujemy

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Przykład 2.

Wykażemy, że jeśli istnieje $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, to:

a) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ b) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$

Ad a) Mamy:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\text{ o ile }\alpha,\beta,(\alpha-\beta)\in\boldsymbol{R}-\left\{x\colon x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{C}\right\}.$$

Wskaż twierdzenia, z których skorzystaliśmy, wykonując powyższe przekształcenia.

Ad b) Wykorzystamy wzór z punktu a). W miejsce β wstawimy $(-\beta)$

$$\operatorname{tg}[\alpha-(-\beta)]=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(-\beta)}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)},$$

skąd

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\text{ o ile }\alpha,\beta,(\alpha+\beta)\in\boldsymbol{R}-\left\{x\colon x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{C}\right\}.$$

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$, to $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

Obliczamy wartość wyrażenia $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. Mamy

$$\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}}=\frac{\dfrac{5}{6}}{\dfrac{5}{6}}=1$$

A to znaczy, że

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$$

Jeśli $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ i $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>0$, to z tego wynika, że $(\alpha+\beta)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, więc

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, bo w przedziale $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ funkcja $y=\operatorname{tg}x$ jest różnowartościowa.

Przykład 4.

Wykażemy, że jeśli α, β, γ są miarami kątów trójkąta nieprostokątnego, to

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

Ponieważ α, β, γ są miarami kątów trójkąta, zatem

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \text{stąd} \qquad \gamma = \pi - (\alpha + \beta), \text{ więc}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$$

Zwykle łatwiej jest przekształcać sumę na iloczyn, więc przekształcamy lewą stronę równości.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}[\pi - (\alpha + \beta)] = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} =$$

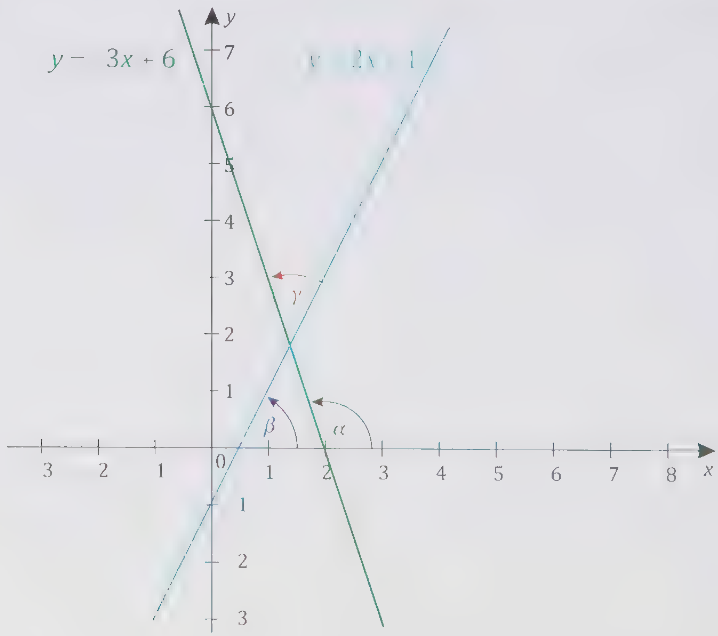
$$= \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta =$$

$$= -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

Otrzymaliśmy prawą stronę równości, a to znaczy, że równość jest prawdziwa przy podanych założeniach.

Przykład 5.

Naszkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji liniowych $y = -3x + 6$ i $y = 2x - 1$, a następnie wyznaczymy miarę kąta między tymi wykresami.



Wykres funkcji liniowej

$y = -3x + 6$

jest nachylony do osi OX pod takim kątem α, $\alpha \in (0, \pi)$, że

$\operatorname{tg} \alpha = -3$

Wykres funkcji liniowej

$y = 2x - 1$

jest nachylony do osi OX pod takim kątem β, $\beta \in (0, \pi)$, że

$\operatorname{tg} \beta = 2$

Kąt γ, czyli kąt między danymi prostymi jest równy różnicy między kątem α i kątem β, zatem

$\gamma = \alpha - \beta$

Wyznaczymy $\operatorname{tg} \gamma$. Łatwo stwierdzić, że wykresy funkcji liniowych nie są prostopadłe $(-3 \cdot 2 \neq -1)$.
Mamy więc

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2} = 1 \qquad \text{i} \qquad \gamma \in (0, \pi), \qquad \text{zatem}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{4}$$

Kąt między wykresami funkcji liniowych jest równy $\frac{\pi}{4}$.

Wróćmy jeszcze raz do wzoru

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

Jeśli przyjmiemy, że $\alpha = \beta$, to otrzymamy wzór na cosinus kąta podwojonego

(*) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Jeśli uwzględnimy zależności

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ lub $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$,

to otrzymamy dwa warianty wzoru (*)

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ lub $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Otrzymaliśmy kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R}$, to

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Jeśli we wzorze

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

przyjmiemy, że $\alpha = \beta$, to otrzymamy wzór na sinus kąta podwojonego

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Twierdzenie 3.

Jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R}$, to

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Przykład 6.

Wiedząc, że $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ i $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, obliczymy $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$.

Ponieważ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, więc

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 - \frac{128}{289} = \frac{161}{289}$$

Obliczamy $\sin 2\alpha$. Możemy to zrobić na dwa sposoby.

I sposób

Znając $\sin\alpha$, obliczamy $\cos\alpha$; korzystamy z „jedynki trygonometrycznej".

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\dfrac{8}{17}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ i $\cos\alpha < 0$, bo $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, więc

$$\cos\alpha = \frac{-15}{17}$$

Następnie obliczamy $\sin 2\alpha$, korzystając ze wzoru $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Mamy

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{8}{17}\cdot\frac{(-15)}{17} = \frac{-240}{289}$$

II sposób

Znając $\cos 2\alpha$, korzystamy bezpośrednio z „jedynki trygonometrycznej" do obliczenia $\sin 2\alpha$.

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

$\sin^2 2\alpha + \left(\dfrac{161}{289}\right)^2 = 1$ i $\sin 2\alpha < 0$, bo jeśli $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, to $2\alpha \in (\pi, 2\pi)$, więc

$$\sin 2\alpha = \frac{-240}{289}$$

Szukane wartości to: $\cos 2\alpha = \dfrac{161}{289}$ i $\sin 2\alpha = \dfrac{-240}{289}$.

Przykład 7.

Obliczymy $\sin\frac{\pi}{12}$.

Łatwo zauważyć, że

$$\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do obliczenia szukanej wartości wykorzystamy wzór

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, przyjmując $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

Otrzymujemy równanie

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\cdot\sin^2\frac{\pi}{12}, \qquad \text{skąd } \sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \quad \text{i} \quad \sin\frac{\pi}{12}>0, \quad \text{zatem}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

UWAGA: Ponieważ $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, więc $\sin\frac{\pi}{12}$ można obliczyć też tak:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Jak pokazać – bez pomocy kalkulatora – że liczby $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ i $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ są równe?

Przykład 8.

Wykażemy, że $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, oraz podamy konieczne założenia.

Przekształcamy lewą stronę równości tak, aby w liczniku i w mianowniku pojawiły się iloczyny:

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$$

Równość jest prawdziwa wtedy, gdy $\cos\alpha\neq 0$ i $1+2\cos\alpha\neq 0$, czyli wtedy, gdy

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{C}, \quad \alpha\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{C} \quad \text{i} \quad \alpha\neq\frac{-2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{C}$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz: a) $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ b) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
2. Wykaż, że jeśli $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\boldsymbol{R}-\{x: x=k\pi, k\in\boldsymbol{C}\}$, to $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$
3. Wykaż, że $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\alpha$, gdzie $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Zapiszmy cztery znane nam już wzory:

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

(2) $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

(3) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

(4) $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

Dodajemy tożsamości (1) i (2) stronami i otrzymujemy

(*) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos y$

Jeśli przyjmiemy, że

$$x + y = \alpha$$
$$x - y = \beta,$$

to otrzymamy

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Po dokonaniu odpowiednich podstawień w równości (*) otrzymujemy wzór

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Jeśli natomiast tożsamości (1) i (2) odejmiemy stronami i wykonamy te same podstawienia, to otrzymamy wzór

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Postępując podobnie w przypadku tożsamości (3) i (4), uzyskamy dwa kolejne wzory.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Otrzymane rezultaty zapiszemy w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Jeśli $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, to:

a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

b) $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Powyższe wzory były stosowane przez długi czas do sprawnego wykonywania obliczeń. Oprócz znajomości wzorów potrzebne były też tablice trygonometryczne. Żyjący w X wieku arabski matematyk i astronom Abu-l-Wafa był autorem tablic sinusów co 15′ z dokładnością do ośmiu cyfr po przecinku. Tablice funkcji trygonometrycznych co 10′ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku znalazły się w słynnym dziele *De revolutionibus orbium coelestium*. Mikołaj Kopernik sam sporządził tablice potrzebne do obliczeń. Jego uczeń, Retyk, matematyk i astronom niemiecki, najgorętszy zwolennik idei mistrza i inicjator publikacji traktatu, w tym oczywiście tych tablic, pracował później nad kolejnymi tablicami, z wartościami funkcji co 10′ z dokładnością do dziesięciu miejsc po przecinku.
A oto jak wykorzystywano tablice trygonometryczne w rachunkach.
Wzór (*) z poprzedniej strony zapiszmy w postaci

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Wykorzystamy go do pomnożenia liczb 76464,0276 i 8595303,72

$$76464{,}0276 \cdot 8595303{,}72 = 0{,}764640276 \cdot 0{,}859530372 \cdot 10^{12} =$$

$$= \underline{\sin 49°50'} \cdot \underline{\cos 30°40'} \cdot 10^{12} = \frac{1}{2}(\sin 80°30' + \sin 19°10') \cdot 10^{12} =$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{0{,}9862856015} + \underline{0{,}3283171752}) \cdot 10^{12} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}3146027767 \cdot 10^{12} =$$

$$= 657301388350$$

Wyrażenia podkreślone odczytywano z tablic. Dokładny wynik mnożenia jest równy

657231540876,462672

Sprawdź, ile czasu zajęłoby Tobie wykonanie tego mnożenia sposobem pisemnym.

W kolejnych przykładach omówimy zastosowanie twierdzenia 1.

Przykład 1.

Zapiszemy w postaci iloczynu wyrażenia:

a) $\sqrt{2} - 2 \cdot \sin\alpha$ b) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Ad a) Najpierw wyłączymy przed nawias liczbę 2, następnie $\frac{\sqrt{2}}{2}$ zapiszemy jako $\sin\frac{\pi}{4}$, a na koniec zastosujemy wzór na różnicę sinusów (twierdzenie 1b).

$$\sqrt{2} - 2 \cdot \sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\right) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + \alpha}{2}\right) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Ad b) Zapiszemy $\sin\alpha$ za pomocą funkcji cosinus (korzystając z odpowiedniego wzoru redukcyjnego), a następnie zastosujemy wzór na sumę cosinusów (twierdzenie 1c).

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\alpha=2\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

Oczywiście można też było zapisać $\cos\alpha$ za pomocą funkcji sinus i zastosować wzór na sumę sinusów.

Przykład 2.

Wykażemy, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to

(*) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+1$

Będziemy przekształcać sumę: $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$. Dodamy najpierw $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ (twierdzenie 1c) i wykorzystamy założenie, przedstawiając γ jako $\pi-(\alpha+\beta)$. Dalej wykorzystamy wzór na cosinus kąta podwojonego oraz wzór na różnicę cosinusów (twierdzenie 1d).

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=$$

$$=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=$$

$$=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1=$$

$$=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[-2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{-\beta}{2}\right)\right]+1=$$

$$=4\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+1=4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+1=$$

$$=4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+1,$$ co kończy dowód.

W przekształceniach wykorzystaliśmy, oprócz podanych twierdzeń, następujące wzory redukcyjne:

$\cos(\pi-x)=-\cos x,\ x\in\boldsymbol{R}$

$\sin(-x)=-\sin x,\ x\in\boldsymbol{R}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\ x\in\boldsymbol{R}$

Wskaż miejsca, w których korzystaliśmy z tych wzorów!

Przykład 3.

Wykażemy, że

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{-1}{2}$$

Przekształcamy lewą stronę równości.

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=$$

(do dwóch pierwszych składników stosujemy wzór na sumę cosinusów, do trzeciego składnika – wzór na cosinus kąta podwojonego)

$$=2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+2\cdot\cos^2\frac{3\pi}{7}-1=$$

(z dwóch pierwszych składników wyłączamy wspólny czynnik)

$$=2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\left[\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right]-1=$$

(stosujemy wzór na sumę cosinusów)

$$=2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot2\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-1=$$

(iloczyn mnożymy i dzielimy przez $\sin\frac{\pi}{7}$)

$$=\frac{2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-1=$$

(stosujemy wzór na sinus kąta podwojonego)

$$=\frac{2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-1=$$

(jeszcze raz stosujemy wzór na sinus kąta podwojonego)

$$=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-1=$$

(stosujemy w liczniku wzór redukcyjny $\sin(\pi-x)=\sin x$)

$$=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-1=$$

(mnożymy licznik i mianownik ułamka przez 2 i stosujemy w liczniku wzór na sinus kąta podwojonego)

$$=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}-1=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}-1=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}-1=\frac{1}{2}-1=\frac{-1}{2},$$

co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wykaż, że $\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$. Podaj konieczne założenia.

2. Zapisz w postaci iloczynu:
   a) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$
   b) $\sqrt{2}+2\sin\alpha$

Równania trygonometryczne

Teraz zajmiemy się równaniami trygonometrycznymi o większym stopniu trudności.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Dziedziną równania jest zbiór $\mathbb{R}$. Podzielimy obie strony równania przez 2. Zatem:

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

Równanie rozwiążemy przez podstawienie. Argument funkcji sinus oznaczamy przez α, czyli $\alpha=3x-\frac{\pi}{4}$. Równanie $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ ma dwie serie rozwiązań:

$$\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad \alpha=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$$

Wobec tego:

$$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C} \ \vee\ 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$$

$$3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C} \ \vee\ 3x=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$$

$$3x=\frac{5}{12}\pi+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C} \ \vee\ 3x=\frac{13}{12}\pi+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$$

$$x=\frac{5}{36}\pi+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in \boldsymbol{C} \ \vee\ x=\frac{13}{36}\pi+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$$

Rozwiązaniami równania $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ są liczby mające postać: $\frac{5}{36}\pi+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$ oraz $\frac{13}{36}\pi+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $3\cos^2x+2\sin^2(\pi+x)=2{,}5$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

Najpierw doprowadzimy równanie do prostszej postaci: skorzystamy ze wzoru redukcyjnego

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,$$

a następnie z „jedynki trygonometrycznej”. Mamy:

$$3\cos^2x+2[\sin(\pi+x)]^2=2{,}5$$

$$3\cos^2x+2(-\sin x)^2=2{,}5$$

$$3\cos^2x+2\sin^2x=2{,}5$$

$$\cos^2x+2(\cos^2x+\sin^2x)=2{,}5$$

$$\cos^2x+2=2{,}5$$

$$\cos^2x=0{,}5$$

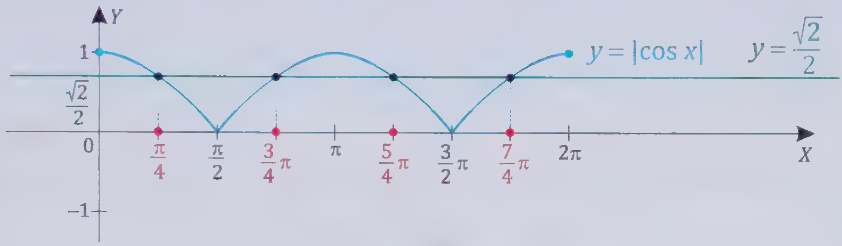
Obie strony otrzymanego równania są nieujemne, stąd:

$$\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Ale dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$: $\sqrt{a^2} = |a|$, zatem:

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Naszkicujemy teraz wykres funkcji $y = |\cos x|$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ i wyznaczymy te argumenty, dla których wartość funkcji jest równa $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Rozwiązania równania to liczby: $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\operatorname{ctg} x \cdot \sin x + \cos x = 2$.

Określamy dziedzinę równania:

$$D = \{x: x \in \mathbf{R} \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbf{C}\}$$

Skorzystamy z zależności $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Otrzymujemy:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x + \cos x = 2$$

$$2 \cdot \cos x = 2$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2k\pi, k \in \mathbf{C}$$

Zauważmy, że żadna liczba mająca postać $2k\pi$, $k \in \mathbf{C}$ nie należy do dziedziny równania. Równanie nie ma rozwiązań, czyli jest sprzeczne.

Przykład 4.

Wyznaczymy rozwiązania równania $\frac{1 - \cos 8x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$.

Aby wyznaczyć dziedzinę tego równania, musimy uwzględnić dwa warunki:

1. tg x ma być określony, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$
2. mianownik ułamka po lewej stronie znaku równości powinien być różny od zera, tzn.:

   $1 + \operatorname{tg} x \neq 0$, czyli $\operatorname{tg} x \neq -1$. Stąd $x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

Tak więc $D = \left\{x\colon x \in \boldsymbol{R} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$.

Przyrównujemy licznik ułamka do zera:

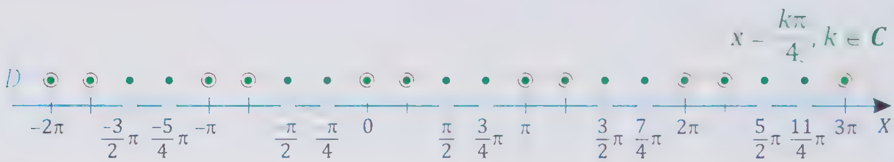
$1 - \cos 8x = 0$

$\cos 8x = 1$

$8x = 2k\pi$

$x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \boldsymbol{C}$

Spośród liczb mających postać $\frac{k\pi}{4}$, $k \in \boldsymbol{C}$, należy wykluczyć te, które nie należą do dziedziny równania. Łatwo jest to zrobić na osi liczbowej.



Kolorem czerwonym zaznaczone są rozwiązania równania (liczby mające postać $\frac{k\pi}{4}$, $k \in \boldsymbol{C}$, które należą do dziedziny).

Rozwiązaniami równania są liczby mające postać: $k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$ oraz $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru p ($p \in \boldsymbol{R}$), dla których równanie

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sin x - 2p + 3) = 0$$

w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ ma cztery różne rozwiązania, wśród których trzy są ujemne. Skorzystamy z własności iloczynu i zapiszemy dane równanie w postaci alternatywy dwóch równań:

$$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \vee \quad \sin x - 2p + 3 = 0,$$

skąd

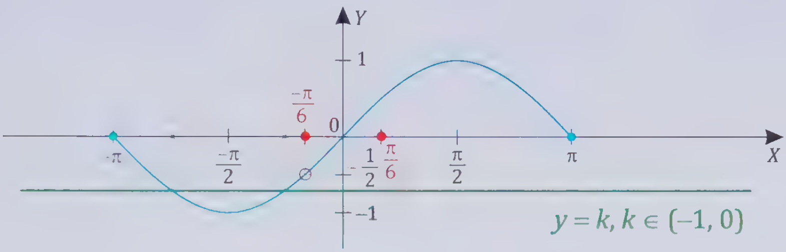
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \sin x = 2p - 3$$

W przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ równanie $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ma, niezależnie od wartości parametru p, dwa rozwiązania:

$\frac{-\pi}{6}$ oraz $\frac{\pi}{6}$ (sprawdź!).

Aby równanie wyjściowe miało cztery różne rozwiązania, wśród których trzy rozwiązania są ujemne, równanie $\sin x = 2p - 3$ powinno mieć dwa rozwiązania ujemne, różne od $-\frac{\pi}{6}$.

Do analizy tej sytuacji posłużymy się wykresem funkcji $y = \sin x$, $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.



Równanie $\sin x = k$, gdzie $k = 2p - 3$, ma dwa rozwiązania ujemne i różne od $-\frac{\pi}{6}$ wtedy, gdy $k \in (-1, 0)$ i $k \neq \frac{-1}{2}$. Zatem:

$-1 < 2p - 3 < 0 \wedge 2p - 3 \neq \frac{-1}{2}$. Stąd:

$1 < p < \frac{3}{2} \wedge p \neq 1\frac{1}{4}$, czyli

$p \in \left(1, 1\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}\right)$

Równanie $\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (\sin x - 2p + 3) = 0$ ma cztery różne rozwiązania, wśród których trzy są ujemne wtedy, gdy $p \in \left(1, 1\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}\right)$.

Przykład 6.

Rozwiążemy równanie $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby zależała tylko od $\cos x$. Z „jedynki trygonometrycznej" otrzymujemy $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, więc

$1 - \cos^2 x - 2\cos x + 2 = 0$

$-\cos^2 x - 2\cos x + 3 = 0$

Podstawiamy pomocniczą niewiadomą t, $t = \cos x$ i otrzymujemy równanie kwadratowe.

$$-t^2 - 2t + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$t = 1 \lor t = -3$$

Zatem

$$\cos x = 1 \quad \lor \quad \cos x = -3 \text{ (równanie sprzeczne)}$$

$$x = 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Rozwiązaniem równania są liczby mające postać $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 7.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Dzielimy równanie stronami przez 2.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot \cos x = \frac{-1}{2}$$

Zauważmy, że $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc

$$\cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{-1}{2} \qquad \text{(stosujemy wzór na sinus sumy)}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}, \qquad \text{skąd}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C} \quad \lor \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

$$x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C} \quad \lor \quad x = \pi + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Rozwiązaniem równania są liczby mające postać $\frac{-\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$ oraz $\pi + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 8.

Rozwiążemy równanie $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Równanie to możemy podzielić stronami przez $\sqrt{2}$ i postępować podobnie jak w przykładzie 7. Możemy też postąpić inaczej.

Zapisujemy $\cos x$ jako $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ i stosujemy wzór na sumę sinusów.

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad x-\frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{6}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

$$x = \frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Rozwiązaniem równania są liczby mające postać $\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$ oraz $\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 9.

Rozwiążemy równanie $\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4},\ x \in \boldsymbol{R}$.

Lewa strona równania jest „fragmentem" wzoru $\sin x = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$. Mamy zatem

$$\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4} \quad / \cdot 2$$

$$2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$$

Rozwiązania równania mają postać $\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$ oraz $\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 10.

Rozwiążemy równanie $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2},\ x \in \boldsymbol{R}$.

Stosujemy najpierw wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=\frac{1}{2}$$

Pierwszy czynnik po lewej stronie równania jest równy 1 („jedynka trygonometryczna"), stąd

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2} \quad / \cdot (-1)$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{-1}{2} \qquad \text{(stosujemy wzór na cosinus kąta podwojonego)}$$

$$\cos 2x=\frac{-1}{2}$$

$$2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad 2x=\frac{-2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$$

$$x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in \boldsymbol{C} \quad \vee \quad x=\frac{-\pi}{3}+k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$$

Rozwiązania równania mają postać $\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$ oraz $\frac{-\pi}{3}+k\pi,\ k\in \boldsymbol{C}$.

Przykład 11.

Zbadamy liczbę rozwiązań równania

(*) $2\sin^2 x-3\sin x=m$, gdzie $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$

w zależności od wartości parametru m, $m\in \boldsymbol{R}$.

Dziedziną równania jest przedział $\langle-\pi,\pi\rangle$. Liczba rozwiązań równania (*) jest równa liczbie punktów wspólnych wykresów funkcji

$y=2\sin^2 x-3\sin x$, gdzie $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$ oraz $y=m$.

Naszkicowanie wykresu funkcji $y=2\sin^2 x-3\sin x$, $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$, jest zadaniem dość trudnym. Możemy je zamienić na znacznie łatwiejsze, dokonując podstawienia

$t=\sin x$

Zauważmy, że jeśli $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$, to sinus x przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle-1,1\rangle$, czyli

$t\in\langle-1,1\rangle$

Otrzymujemy zatem funkcję

$y=2t^2-3t$, gdzie $t\in\langle-1,1\rangle$.

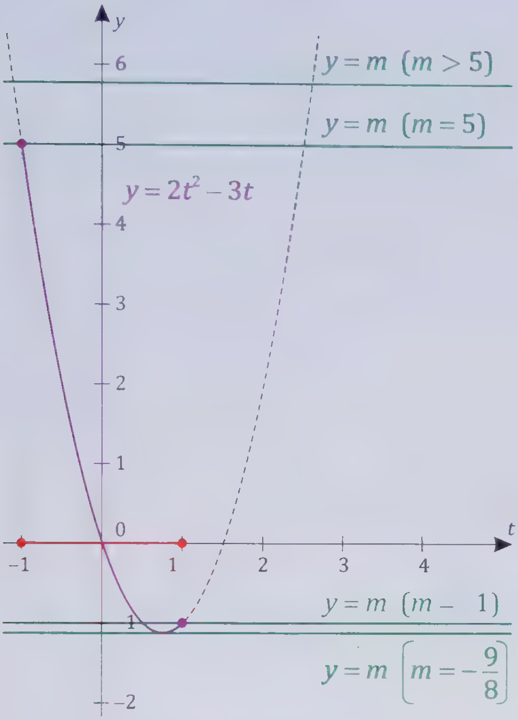
W przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$ funkcja sinus jest różnowartościowa, zatem każdej wartości $\sin x$ (czyli również każdej wartości t z przedziału $\langle-1,1\rangle$) odpowiada tylko jedna wartość x z przedziału $\langle-\pi,\pi\rangle$. Zatem liczba rozwiązań równania

$2\sin^2 x-3\sin x=m$, $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$

będzie równa liczbie punktów wspólnych wykresów

$y=2t^2-3t$, gdzie $t\in\langle-1,1\rangle$ oraz $y=m$.

Szkicujemy wykresy funkcji $y = 2t^2 - 3t$, gdzie $t \in \langle -1, 1\rangle$ oraz $y = m$ w jednym układzie współrzędnych



Wierzchołek paraboli, której częścią jest wykres funkcji

$$y = 2t^2 - 3t,\ t \in \langle -1, 1\rangle,$$

ma współrzędne

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{-9}{8}\right).$$

Ponadto do wykresu tej funkcji należą punkty o współrzędnych

$$(-1, 5) \text{ oraz } (1, -1).$$

Korzystając z wykresów, możemy stwierdzić, że równanie $2\sin^2 x - 3\sin x = m$, gdzie $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$:

- nie ma rozwiązań wtedy, gdy $m \in \left(-\infty, \frac{-9}{8}\right) \cup (5, +\infty)$
- ma 1 rozwiązanie wtedy, gdy $m \in \left\{\frac{-9}{8}\right\} \cup (-1, 5)$
- ma 2 rozwiązania wtedy, gdy $m \in \left(\frac{-9}{8}, -1\right\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:
   a) $\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$
   b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos^2 x = 1\frac{1}{4}$
   c) $\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x = 0$
   d) $\mathrm{ctg}^2 x - 2\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$
2. Rozwiąż równania:
   a) $4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0$
   b) $2\cos x = 3\mathrm{tg}\, x$
   c) $\sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$
   d) $\cos 2x + \cos x = 0$

Nierówności trygonometryczne

Przykład 1.

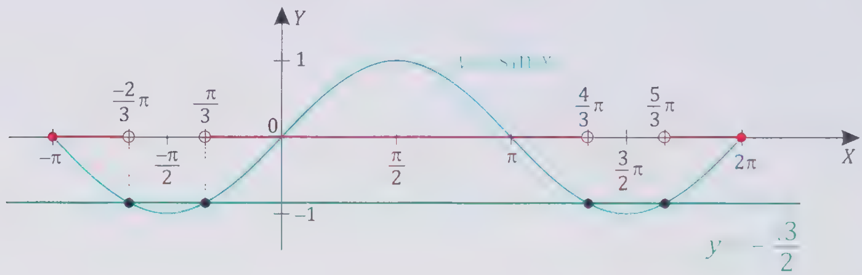
Rozwiążemy nierówność $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$

a) w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$

b) w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

Rozwiązać nierówność $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$ to wyznaczyć (o ile istnieje) zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartości większe od $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

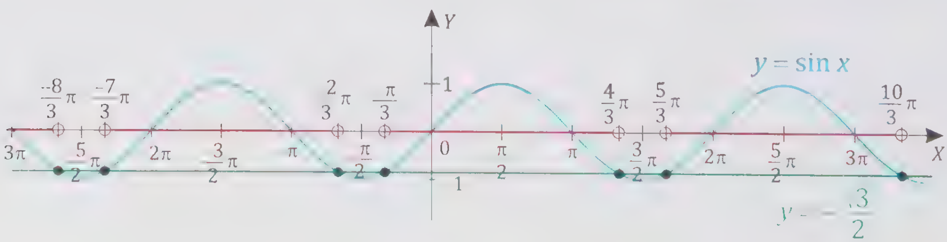
Ad a) Szkicujemy wykres funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$ oraz wykres funkcji $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.



Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności (zaznaczony kolorem czerwonym). Zbiorem rozwiązań nierówności $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$, gdzie $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$ jest suma przedziałów

$$\left\langle -\pi, -\frac{2}{3}\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi, 2\pi \right\rangle$$

Ad b) Tym razem rozpatrujemy funkcję $y = \sin x$ w całej dziedzinie, czyli w zbiorze $\boldsymbol{R}$.



Zbiorem rozwiązań nierówności $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, jest suma przedziałów mających postać:

$$\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{4}{3}\pi+2k\pi\right), k \in \mathbf{C}$$

Przykład 2.

Wyznaczymy zbiór rozwiązań nierówności $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

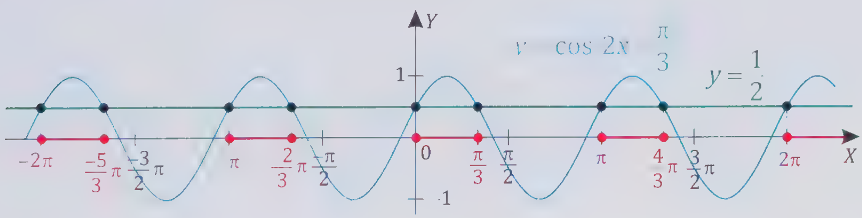
I sposób

Naszkicujemy wykres funkcji $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ i na jego podstawie odczytamy, dla jakich argumentów funkcja $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ przyjmuje wartości większe lub równe $\frac{1}{2}$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci

$$y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Wykres funkcji powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y=\cos 2x$ o wektor $\vec{u}=\left[\frac{\pi}{6}, 0\right]$.

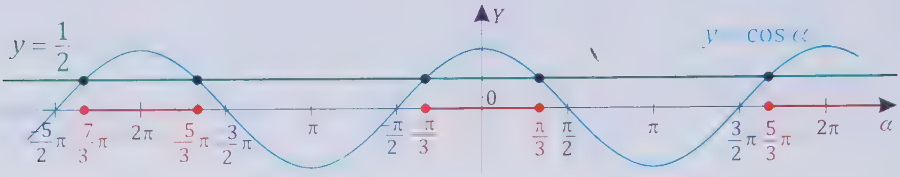


Z wykresu odczytujemy, że zbiorem rozwiązań nierówności $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}$ jest suma przedziałów mających postać $\left\langle k\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{C}$.

II sposób

Wykonujemy podstawienie: $\alpha = 2x - \frac{\pi}{3}$, gdzie $\alpha \in \mathbf{R}$. Najpierw rozwiązujemy graficznie nierówność

$$\cos\alpha \geqslant \frac{1}{2}$$



Zbiorem rozwiązań nierówności $\cos\alpha \geqslant \frac{1}{2}, \alpha \in \boldsymbol{R}$, jest suma przedziałów mających postać

$$\left\langle \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$$

Zatem α spełnia warunek:

$$\frac{-\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \boldsymbol{C}.$$

Wobec tego:

$$\frac{-\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x - \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / + \frac{\pi}{3}$$

$$2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad / : 2$$

$$k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

czyli

$$x \in \left\langle k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}, x \in \boldsymbol{R}$, jest suma przedziałów mających postać $\left\langle k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \boldsymbol{C}$.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \cos^5 x + \ldots \geqslant 1$.

Lewa strona nierówności jest szeregiem geometrycznym. Mamy

$a_1 = \cos x$

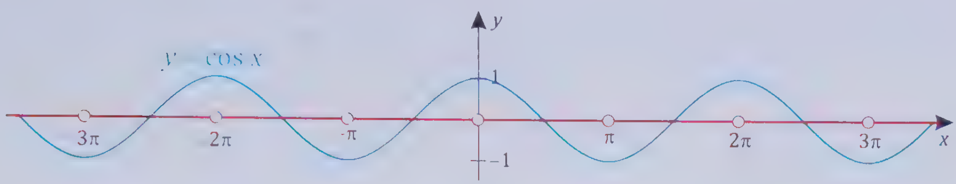
$q = \cos x$

Aby szereg geometryczny był zbieżny, musi być spełniony warunek

$|q| < 1$

Mamy zatem

$$|\cos x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \cos x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \boldsymbol{R} - \{x \colon x = k\pi, k \in \boldsymbol{C}\}$$



Określiliśmy dziedzinę nierówności.

$D = \mathbf{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \mathbf{C}\}$

Możemy teraz zastosować wzór na sumę S szeregu geometrycznego.

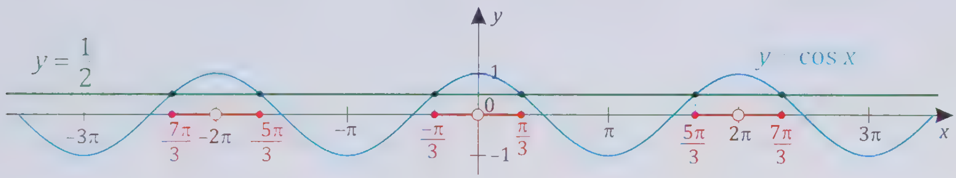
$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Mamy

$$\frac{\cos x}{1-\cos x} \geqslant 1 \quad / \cdot (1-\cos x) \qquad \left(\text{zauważ, że } \bigwedge_{x \in D} 1-\cos x > 0\right)$$

$$\cos x \geqslant 1 - \cos x$$

$$\cos x \geqslant \frac{1}{2}$$



Po uwzględnieniu dziedziny stwierdzamy, że zbiorem rozwiązań nierówności jest suma zbiorów mających postać $\left\langle \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ 2k\pi \right) \cup \left(2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{C}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż nierówności:

   a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

   b) $|\cos x| < \frac{1}{2}$, gdzie $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$

   c) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x > 0$

   d) $\sin x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

2. Rozwiąż nierówność:

   $\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \sin^8 x + \ldots \geqslant 1$

Skorowidz ważniejszych terminów

Odpowiedzi do zadań

1. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta

1. $y = 3x$, $a = 3$
2. $f(a) = 2a$, gdzie $a > 0$

Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej

4. a) $m = -5$ b) $m \in (-3, +\infty)$

Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej

1. a) $x_0 = -2$; $f(x) > 0$, jeśli $x \in (-2, +\infty)$; $f(x) < 0$, jeśli $x \in (-\infty, -2)$
   b) $x_0 = 25$; $f(x) > 0$, jeśli $x \in (-\infty, 25)$; $f(x) < 0$, jeśli $x \in (25, +\infty)$
2. $f(x) = 0{,}8x - 4$
3. $D_f = \boldsymbol{R}$, $ZW_f = \boldsymbol{R}$, $x_0 = 10$, $f(x) > 0$, jeśli $x \in (-\infty, 10)$; $f(x) < 0$, jeśli $x \in (10, +\infty)$, f jest malejąca, f jest różnowartościowa, nie przyjmuje wartości największej ani wartości najmniejszej
4. a) $\langle -1, +\infty)$ b) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$
5. a) $m = 10$ b) $m \in (-5, +\infty)$ c) $m = -5$, wówczas $f(x) = 15$
6. a) $m \in (-1, +\infty)$ b) $m \in (-\infty, 1)$

Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej

1. a) 45° b) 120° c) 150°
2. a) 42° e) 152° f) 104°
3. a) $y = \frac{1}{2}x + 5$ b) $y = -\sqrt{3}x - 1$ c) $y = \sqrt{3}x - 2$
4. a) $y = \frac{3}{2}x + 1$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 14$ c) $y = -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4}$ lub $y = \frac{5}{12}x - 2\frac{1}{4}$
5. 84°

Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera

1. $y = 4x + 41$
2. $y = -x + 2$
3. a) $m = -2$ b) $m = 1\frac{1}{3}$

Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego

1. a) $F = 1{,}8C + 32$ b) 15°C c) 97,88°F
2. a) $h(x) = 26x + 8$; $f(x) = 20{,}8x + 96$ b) co najmniej 17

Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą

1. a) równanie ma jedno rozwiązanie, $x = m - 1$, jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{1\}$; rozwiązaniem równania jest każda liczba rzeczywista, jeśli $m = -1$

   b) równanie ma jedno rozwiązanie, $x = \dfrac{m+5}{5-m}$, jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{5\}$; równanie nie ma rozwiązań, jeśli $m = 5$
2. a) $m = 2$ b) $m = -3$
3. a) $m = 3$ b) $m \in (6, +\infty)$

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

1. $x = -1$
2. a) $x \in (1, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 8, +\infty)$
3. a) $x = \frac{1}{2} \vee x = 5\frac{1}{2}$ b) $x = -10 \vee x = \frac{2}{3}$
4. a) $x \in \langle 3, 4\rangle$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

1. a) $\left(x, -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right), x \in \boldsymbol{R}$ b) $\left(x, \frac{3}{2}x\right), x \in \boldsymbol{R}$ c) $(-12, y), y \in \boldsymbol{R}$ d) $(x, 7), x \in \boldsymbol{R}$

3. a) $m = 2$ b) $m = -1$

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

1. (7, 1)
2. (1, 1)
3. (2, 0)
4. a) nieoznaczony; wszystkie pary liczb mające postać $(x, 7 - x)$, $x \in \boldsymbol{R}$

   b) sprzeczny c) oznaczony; (2, 1)

6. a) $\begin{cases} x = 1\frac{24}{43} \\ y = \frac{2}{43} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5\frac{2}{11} \\ y = 2\frac{3}{22} \end{cases}$

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

1. a) jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{6\}$, to układ równań ma jedno rozwiązanie $\left(\dfrac{1-2m}{m-6}, \dfrac{3-m^2}{m-6}\right)$; jeśli $m = 6$, to układ równań jest sprzeczny

   b) jeśli $m = -1$, to rozwiązaniem układu równań jest każda para liczb mająca postać $(x, x + 2)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$, to układ równań jest sprzeczny

Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych

1. 140; 445
2. 40; 13
3. 12%, 14%
4. 1200 km

Zastosowanie układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiazywania zadań

1. a) największa wartość funkcji f: 102, najmniejsza wartość funkcji f: 2

   b) największa wartość funkcji f: 60, najmniejsza wartość funkcji f: 4

2. Funkcja kwadratowa

Własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$

2. b) $-2; -18\sqrt{2}; 4 - 3\sqrt{2}$

Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

1. a) $y = 6x^2 + 2$ b) $y = 6(x+4)^2$ c) $y = 6(x-5)^2 - 4$ d) $y = 6(x+10)^2 + 100$
2. a) $ZW_f = (-\infty, -3\rangle$ b) $f(-5) = -3, f(-4) = -5$
3. a) $W(10, 12)$ b) $x = 10$

   c) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 10\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 10, +\infty)$

   d) dla argumentu 10 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, równą 12
4. $y = \frac{2}{5}(x+1)^2 + 3$
5. $y = -4(x-5)^2$

Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

1. $y = -(x+4)^2 + 5$
2. $a = -2, b = -6, c = 8$
3. a) $W(6, -15)$, $(0, 21)$
4. $y = -x^2 + 6x - 5$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

1. a) $y = 3(x+2)(x-1)$ b) $y = (x+1)(x-9)$ c) $y = \frac{2}{3}(x+3)(x-6)$
2. a) tak, $y = 4(x-0{,}5)(x+0{,}5)$ b) nie; c) tak, $y = -3(x+1)(x-3)$
3. $y = \frac{1}{2}(x+8)(x-3)$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x - 12$, $y = \frac{1}{2}\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 15\frac{1}{8}$

Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu

1. a) $D_f = \boldsymbol{R}$, $ZW_f = \left\langle -4\frac{1}{2}, +\infty \right)$, miejsca zerowe: -4 oraz 2; f rosnąca w przedziale $\langle -1, +\infty)$, f malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$
2. a) wykresy są symetryczne względem osi OY
3. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1$

Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

1. a) najmniejsza wartość: -8; największa wartość: 10
   b) najmniejsza wartość: 10 największa wartość: 330
2. a) najmniejsza wartość: $-10\frac{1}{2}$; największa wartość: -10
   b) najmniejsza wartość: -60; największa wartość: -12

Badanie trójmianu kwadratowego – zadania optymalizacyjne

1. 7,2 m
2. $S(t) = -t^2 + 9{,}8t + 2$, gdzie $t \in \langle 0, 10\rangle$; piłka spadła po 10 s
3. 6 cm, $3\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm
4. o godz. $14^{\underline{06}}$, ok. 35,7 km

Równania kwadratowe

1. a) -9; 9 b) równanie sprzeczne c) równanie sprzeczne d) 0; -16
2. a) 8 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0; -2 d) -6; -1
3. a) równanie sprzeczne b) -1; 3 c) 0,5 d) $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{5}$
4. a) $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$ b) $x = -\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$, $x = \frac{2\sqrt{2}-3}{2}$
5. a) $x = 1$, $x = 5$ b) $x = -3$, $x = 1$

Równania prowadzące do równań kwadratowych

1. a) $x \in \{-1, 1\}$, b) $x \in \left\{-\sqrt{10}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{10}\right\}$, c) równanie sprzeczne, d) równanie sprzeczne, e) $x \in \{-2, 0, 2\}$, f) $x \in \{-3, 3\}$
3. a) $x = 8$, b) $x \in \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$, c) $x = 11$

Nierówności kwadratowe

1. a) $\boldsymbol{R} - \{0\}$ b) $(-2, 2)$ c) $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ d) $\langle -1, 1\rangle$
2. a) $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$ b) $\langle 0, 2\rangle$ c) nierówność sprzeczna d) $\boldsymbol{R}$

Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego

1. a) 10, b) 8
2. a) $(9, +\infty)$, b) nierówność sprzeczna

Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

1. o 5%
2. co najmniej 16 osób
3. co najmniej 7 osób, 18 meczy
4. Długości boków: 4, 5, 6; pole trójkąta: $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

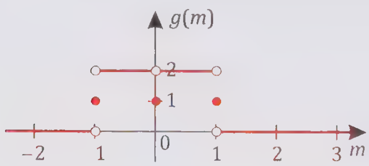
Wzory Viète'a

1. a) miejsca zerowe są różnych znaków
   b) miejsca zerowe są liczbami ujemnymi
   c) miejsca zerowe są liczbami dodatnimi
2. a) $-3, 1$; b) $-10, -5$; c) $3, 8$
3. $8\frac{2}{3}$

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

1. równanie nie ma rozwiązań, gdy $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;
   równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $m \in \{-1, 0, 1\}$;
   równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy $m \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

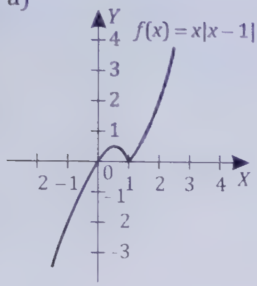
$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 1 & \text{dla} \quad m \in \{1, 0, 1\} \\ 2 & \text{dla} \quad m \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$$



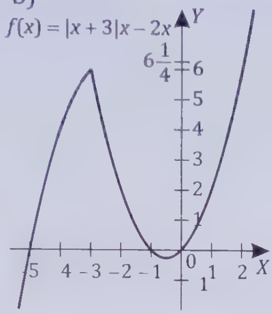
2. $m \in (-3, 0) \cup (0, 1)$
3. $m \in (4, +\infty)$
4. $m = 4$; wartość najmniejsza to -16

Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną

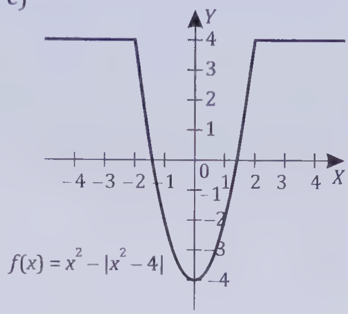
1. a)



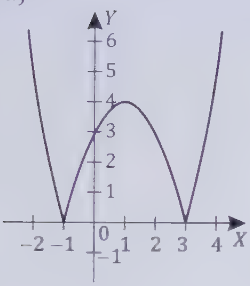
b)



c)

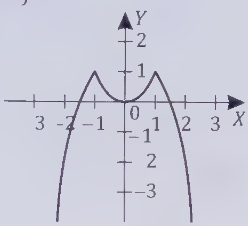


2. a)



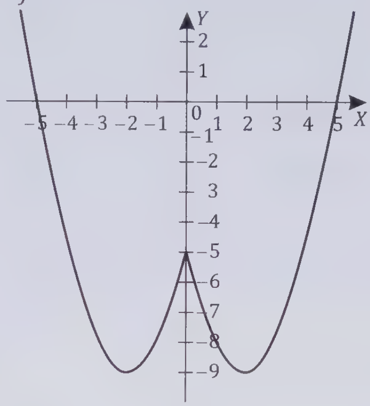
$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

b)



$f(x) = 1 - |x^2 - 1|$

c)



$f(x) = x^2 - 4|x| - 5$

Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

1. a) $x \in \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$; b) $x \in \{2, 3\}$; c) równanie sprzeczne
2. a) $x \in (2-\sqrt{13}, 1) \cup (3, 2+\sqrt{13})$; b) $x \in \langle -2, 2 \rangle$; c) $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$
3. a) $x = 1$; b) $x \in \{0, 2\}$
4. a) $x \in (1, 2)$; b) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 5, +\infty)$

Równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem

1. równanie nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, ma dwa rozwiązania dla $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, ma trzy rozwiązania dla $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, ma cztery rozwiązania dla $m \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$
2. $m \in \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$
3. równanie ma jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty, 0)$, ma dwa rozwiązania dla $m \in \{0, 1\}$, ma trzy rozwiązania, gdy $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
4. $m \in (-3, 2\sqrt{2})$

3. Geometria płaska – czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy

1. a) 75°, 85°, 95°, 105° b) 30°, 60°, 120°, 150°
2. 11,5 cm; 11,5 cm; 11,5 cm; 17,5 cm lub 16 cm; 16 cm; 10 cm; 10 cm
3. 80°, 70°, 100°, 110°; nie
4. a) 15 cm, 15 cm, 20 cm, 20 cm b) 25 cm

Trapezy

1. Kąty są takie same, ale występują w innej kolejności
2. a) 4 cm b) 60°
3. 3 cm
4. b) 10 cm, 15 cm

Równoległoboki

1. a) 25 cm b) 20 cm c) $10\sqrt{13}$ cm
2. 46 cm

Okrąg opisany na czworokącie

1. $|\sphericalangle A| = 70°$, $|\sphericalangle B| = 35°$, $|\sphericalangle C| = 110°$, $|\sphericalangle D| = 145°$
2. 2,5 cm
3. $2\sqrt{2}$ cm
4. 24 cm, 10 cm, $\sqrt{338}$ cm, $\sqrt{338}$ cm
5. 12 cm

Okrąg wpisany w czworokąt

1. 1 dm
2. 2

Podobieństwo. Figury podobne

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 3

Podobieństwo czworokątów

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $|AK| : |KB| = 1 : 3$
3. nie

4. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

1. a) 4 dm^2 b) 4 dm
2. 5 cm^2
3. 9; 8
4. 196 cm^2

Pole równoległoboku. Pole rombu

1. $|AK| : |KM| : |MB| = 2 : 3 : 5$
2. b) 20 cm^2
3. a) 48 cm b) $45\sqrt{5}$ cm^2; $3\sqrt{5}$ cm; $5\sqrt{5}$ cm
4. a) 24 cm^2, 20 cm b) 4,8 cm

Pole trapezu

1. 30 cm^2
2. 4,5 cm; 1,5 cm

Pole czworokąta – zadania różne

1. 1,5 dm^2
2. 30°
3. 24 cm^2

Pola figur podobnych

1. $k = \frac{5}{2}$
2. o 19%
3. o 32,25%
4. a) $|AB| = 18$ cm, $|DC| = 8$ cm b) $h = 10$ cm
5. a) $2\sqrt{5}$ b) $88\sqrt{5}$ cm

Mapa. Skala mapy

1. 2 cm na mapie; 10 km w rzeczywistości
2. ok. 7,2 cm
3. a) 150 km^2 b) 0,58%

5. Wielomiany

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

1. a) jednomian stopnia dziewiętnastego
   b) jednomian stopnia dwudziestego siódmego
2. a) $\text{st.}W(x) = 6$ b) $\text{st.}W(x) = 4$
3. $W(-2) = 21$, $W(-1) = 2$, $W(0) = -1$, $W(1) = 6$, $W(5) = 14$
4. b) -1
5. jeśli $m = 3$, to $\text{st.}W(x) = 2$; jeśli $m = -1$, to $\text{st.}W(x) = 3$; jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 3\}$, to $\text{st.}W(x) = 5$
6. $a = -5$, $b = 3$

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów

1. a) $W(x) + P(x) = 3x^5 - 4x^3 - 2$
   $W(x) - P(x) = 3x^5 - 4x^3 + 12$
   $W(x) \cdot P(x) = -21x^5 + 28x^3 - 35$
   b) $W(x) + P(x) = -x^4 - x^3 - 4x$
   $W(x) - P(x) = -x^4 - 3x^3 + 4x$
   $W(x) \cdot P(x) = -x^7 - 2x^6 + 4x^5 + 8x^4$
2. a) $Q(x) = 2x^7 + 2x^6 + 4x^4 + 6x^3 + 4$
   b) $Q(x) = 2x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 15$
   c) $Q(x) = 3x^6 - x^5 + 16x^3 + x^2 + 16$
   d) $Q(x) = 2x^3 - 4x - 2$
3. a) $W(x) \cdot P(x) = 5x^9 - 30x^8 + 3x^7 + 22x^6 - 2x^5 - x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 12x + 12$
   b) $W(x) \cdot P(x) = -3x^8 - 2x^7 - x^6 + 15x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 15x + 4$

Równość wielomianów

1. a) nie są równe b) są równe
2. a) nie istnieje b) $a = -2$
3. a) $a = 2, b = 4$ b) nie istnieją

Podzielność wielomianów

1. np. $x - 2$, $x + 2$, $2x - 1$, $x + 3$
2. a) np. $W(x) = (3x + 1) \cdot x^3$
4. $P(x) = -2x^2 + 1$
5. $a = 2, b = 3$

Dzielenie wielomianów. Dzielenie wielomianów z resztą

1. a) $Q(x) = -2x^2 + 3x + 1$ b) $Q(x) = x^2 - 1$
2. a) $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $R(x) = 4$ b) $Q(x) = -2x^3 + 4x + 2$, $R(x) = 20x + 10$
3. $a = 3$
4. $a = 6, b = 5$

Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy za pomocą schematu Hornera

1. a) iloraz $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 10x - 1$
   b) iloraz $Q(x) = -3x^3 - 6x^2 - 10x - 20$
   c) iloraz $Q(x) = -5x^2 + 14x - 22$, reszta $R(x) = 37$
   d) iloraz $Q(x) = -x^4 - x^3 + x^2 + x + 5$, reszta $R(x) = 11$

Pierwiastek wielomianu

1. $-\sqrt{5}, -1, 2, \sqrt{5}$
2. a) -3 oraz 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $-2, -1, 1, 2$
   d) wielomian nie ma wymiernych pierwiastków

Twierdzenie Bezouta

1. a) nie b) tak c) nie d) nie
2. $k = 2$
3. -4 oraz 1
4. a) $-2, \frac{1}{3}, 1, 2$ b) $-1, \frac{1}{2}$
5. $a = -2$, $b = -5$, trzeci pierwiastek: -2
6. $a = 17$, $b = -8$, -2

Pierwiastek wielokrotny

1. -3 – pierwiastek czterokrotny; $-9, 9$ – pierwiastki jednokrotne
2. pierwiastek dwukrotny
4. Jeśli $m \in (-2, 2)$, to wielomian ma jeden pierwiastek jednokrotny;
   jeśli $m = -2$, to wielomian ma jeden pierwiastek dwukrotny i jeden pierwiastek jednokrotny;
   jeśli $m = 2$, to wielomian ma jeden pierwiastek trzykrotny;
   jeśli $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, to wielomian ma trzy pierwiastki jednokrotne

Rozkładanie wielomianów na czynniki

1. a) $W(x) = \left(\sqrt{2}x - 3\right)\left(\sqrt{2}x + 3\right)\left(2x^2 + 9\right)$
   b) $W(x) = (x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right)$
   c) $W(x) = (5x + 1)\left(25x^2 - 5x + 1\right)$
   d) $W(x) = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{3}\,x + 1\right)$
2. a) $W(x) = 2(x + 1)(x - 2)(x + 2)$
   b) $W(x) = (2x + 3)(x - 2)(x + 2)$
   c) $W(x) = (x + 1)\left(x^2 - x + 7\right)$
   d) $W(x) = (x - 1)\left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

3. a) $W(x) = (x+1)(2x-3)(x-2)$
   b) $W(x) = (x+1)^2(3-x)$
   c) $W(x) = (x+1)(x+2)\left(2x^2+3\right)$
   d) $W(x) = (x+1)^2(x+2)^2$
4. $W(x) = 3\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$

Równania wielomianowe

1. a) $0, 1, 1\frac{2}{3}$ b) $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2$ c) $0, \frac{1}{2}$ d) $-1, 1$
2. a) $-2, 2, 3$ b) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5$ c) $-2, -1, 3$ d) -1
3. $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -4; m = 14; n = 8$

Zadania prowadzące do równań wielomianowych

1. $-6, -4, -2$
2. -7 i -3 oraz 3 i 7
3. a) $a = 0$ b) 0

Równania wielomianowe z parametrem

1. $k \in \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4\right\}$
3. $p \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
4. $k \in (-\infty, -4)$
5. $m \in (1, +\infty)$
6. $p \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
7. $p = \frac{1}{3}$

Funkcje wielomianowe

2. a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

Nierówności wielomianowe

1. a) $(-\infty, -2\rangle \cup \{-1\} \cup \langle 2, +\infty)$
   b) $(-\infty, 1)$
   c) $(-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$
   d) $(-\infty, -4) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$
2. Wskazówka: $10x^2 = 9x^2 + x^2$

6. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych

1. a) $\frac{1}{8x^5}, x \neq 0$ b) $\frac{1}{x-1}, x \neq 1$ c) $\frac{x-5}{x+5}, x \neq -5, x \neq 5$ d) $\frac{x+9}{x-9}, x \neq 9$

   e) $\frac{x-2}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 3$ f) $\frac{x(x+1)}{x^2+5}, x \neq -1$

2. a) $\frac{2x+1}{x+1}, D = \mathbf{R} - \{-3, -1, 1\}$ b) $\frac{x-5}{x}, D = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$

   c) $\frac{x^2-x-6}{x}, D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 2\}$ d) $\frac{x-1}{x-2}, D = \mathbf{R} - \{-2, 1, 2\}$

3. a) $\frac{6x^2}{3x^3}, x \neq 0$ b) $\frac{16x^2-1}{3x(4x-1)}, x \neq 0, x \neq \frac{1}{4}$ c) $\frac{-(x+3)^2}{x^2-9}, x \neq -3, x \neq 3$

   d) $\frac{x^3-5x}{(x-1)(x^2-5)}, x \neq -\sqrt{5}, x \neq \sqrt{5}, x \neq 1$ e) $\frac{x^2(x-1)}{x(x^2+5x-6)}, x \neq -6, x \neq 0, x \neq 1$

   f) $\frac{x^3-2x^2+3x-6}{(x^2-4)(x-2)}, x \neq -2, x \neq 2$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

1. a) $\frac{7}{x+1}, D = \mathbf{R} - \{-1\}$ b) $\frac{2x-1}{x+2}, D = \mathbf{R} - \{-2\}$ c) $\frac{2}{x^2+3}, D = \mathbf{R}$

   d) $\frac{-3x^2}{(x+1)^2}, D = \mathbf{R} - \{-1\}$ e) $\frac{-x^2+x-2}{x(x+1)}, D = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$ f) $\frac{x-3}{x+2}, D = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

2. a) $\frac{5x-1}{2x+4}, D = \mathbf{R} - \{-2\}$ b) $\frac{5x-9}{x^2-16}, D = \mathbf{R} - \{-4, 4\}$ c) $\frac{x^2+3x-2}{x^3-2x^2}, D = \mathbf{R} - \{0, 2\}$

   d) $\frac{-x^2-2x+1}{x^2-3x-4}, D = \mathbf{R} - \{-1, 4\}$ e) $\frac{x^2+6x+12}{x^3-9x}, D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 3\}$

   f) $\frac{2x^2+7x+2}{x^2+3x+2}, D = \mathbf{R} - \{-2, -1\}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

1. a) $1, D = \mathbf{R} - \{2, 3\}$ b) $\frac{2x}{3}, D = \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$ c) $\frac{x^2+4x+3}{2x^2}, D = \mathbf{R} - \{-3, 0, 4\}$

2. a) $\frac{2x+2}{5}, D = \mathbf{R} - \{-2, 0\}$ b) $\frac{8}{x^2}, D = \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0, 3\right\}$ c) $\frac{x+2}{x-9}, D = \mathbf{R} - \{-9, 9\}$

Zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych

1. *Wskazówka*: Aby wykazać tezę, wystarczy udowodnić, że wyrażenie $\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}$ jest dodatnie. Wyrażenie $\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}$ sprowadź do postaci $\frac{m(a-b)}{b(b+m)}$, a następnie korzystając z założeń, wykaż, że jest ono dodatnie.
2. *Wskazówka*: Lewą stronę tezy przedstaw w postaci sumy $3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$, a następnie skorzystaj z twierdzenia (przykład 1).
3. *Wskazówka*: Tezę przekształć w sposób równoważny do postaci $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4\geqslant 0$. Aby wykazać, że wyrażenie $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4$ jest nieujemne, skorzystaj z twierdzenia (przykład 1).

Równania wymierne

1. a) -7 b) 0 c) -2 d) 3
2. a) 5 b) -16 c) -1 d) $-2, 2$
4. a) $-5, -2, 1$ b) $-4, -3, 1, 2$

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych

1. 3 km/h
2. 14 h

Nierówności wymierne

1. a) $(-\infty, 0)$ b) $(-\infty, 0)\cup(5, +\infty)$ c) $\langle -4, 1)$ d) $(-\infty, -2)\cup\left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$
2. a) $(0, 4)$ b) $\left(-\infty, -2\frac{1}{2}\right\rangle\cup(-2, +\infty)$ c) $\langle -4, 3)$ d) $(-2, +\infty)$
3. a) $(-3, -2)\cup\langle -1, +\infty)$ b) $(-\infty, -2)\cup\{-1\}\cup(3, +\infty)$

Równania i nierówności wymierne z parametrem

1. a) $m\in\{6, 10\}$ b) $m\in\left\{-3, -2\frac{3}{4}\right\}$
2. $m\in(-\infty, -1)\cup(-1, 3)$
3. $m\in(-\infty, -6)\cup(-6, 2)\cup\left(0, \frac{1}{4}\right)$
4. $m\in\left(-\frac{4}{25}, 0\right)$

Proporcjonalność odwrotna

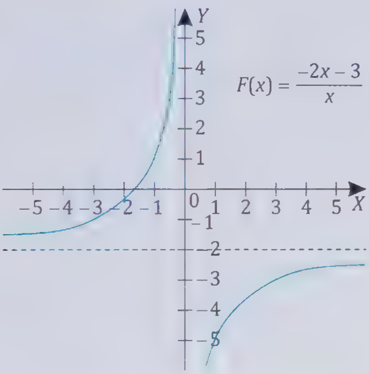
1. 9 robotników
2. a) 2,5 cm b) 30 cm, cztery razy

Funkcje wymierne

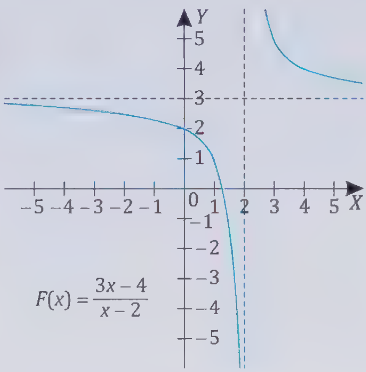
1. a) $a = 6$ b) 2
   c) funkcja jest malejąca w zbiorze $(-\infty, -2)$, rosnąca w zbiorze $(-2, +\infty)$;
   d) wykresem funkcji jest parabola o równaniu $y = (x - 2)(x + 6)$, z której usunięto punkt $(-2, -16)$
2. $m \in (-\infty, -1)$
3. $\langle -3, 3 \rangle$

Funkcja homograficzna

1. a), d)
2. c)



d)



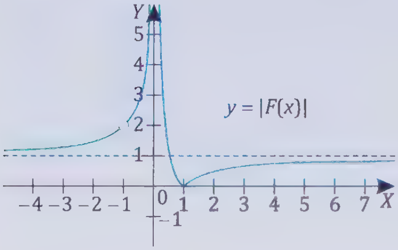
3. a) $\vec{u} = [-5, -3]$; funkcja G jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, -5)$, $(-5, +\infty)$
   b) $\vec{u} = [2, 7]$; funkcja G jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$
   c) $\vec{u} = [-5, 1]$
   d) $\vec{u} = [3, -2]$
4. $x \in (-\infty, -3) \cup (11, +\infty)$

Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

1. $a = -1$ a) $(0, 2)$ b) $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$
2. $a = -2$, $b = 5$, $c = -1$

3. $F(x) = \frac{1}{x} - 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$;

$m \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$



4. 4 i 12 lub 6 i 6

7. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

1. $a_8 = -40$ $a_{101} = -9898$ $a_{n+1} = -n^2 + n + 2$
3. $a_1 = -2$ $a_2 = -1$ $a_5 = 0$
4. a) $a_1 = -6$ $a_2 = -4$ $a_3 = -2$ b) $a_4 = -1$

Monotoniczność ciągu

1. a) tak b) tak c) nie

Ciąg arytmetyczny

1. a) 11 b) ciąg rosnący
3. a) $a_n = 4n - 7$ b) $a_n = -2n + 5$
4. $a_1 = -6$ $r = \frac{1}{2}$
5. $k_1 = -1$, $(0, -2, -4)$ $k_2 = 3$, $(12, 6, 0)$
6. $a_2 = 0{,}6$ $a_3 = -1{,}8$ $a_4 = -4{,}2$ $a_5 = -6{,}6$

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

1. a) −115 b) 490
2. a) 2475 b) 1665 c) 1210
3. b) $a_n = 2n - 1$
4. 31

Ciąg geometryczny

1. a), b) – tak c) nie
2. a) $a_n = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
3. $a_n = \left(-5\frac{1}{16}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

1. nie
2. c) $76\frac{7}{27}$
3. cztery

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

1. ok. 6863,93 zł
2. ok. 12 682,42 zł
3. 20 000 zł

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

1. $a=-2$ i $b=1$ lub $a=4$ i $b=4$
2. $(1, 3, 9, 15)$ lub $(16, 8, 4, 0)$

Granica ciągu liczbowego

1. $a_{26}, a_{27}, a_{28}, a_{29}, \ldots$

Własności ciągów zbieżnych

1. a) 7 b) –1 c) 5 d) –2
2. a) 2 b) $\sqrt{2}$
3. a) 1 b) 3

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

1. a) $a_{751}, a_{752}, a_{753}, \ldots$ b) $a_7, a_8, a_9, \ldots$

Szereg geometryczny

1. a) $\frac{23}{10}$ b) $\frac{34}{333}$ c) $\frac{-1222}{990}$
2. 36 cm^2

8. Trygonometria

Miara łukowa kąta

1. a) $\frac{7\pi}{12}$ b) $\frac{7\pi}{9}$ c) $\frac{11\pi}{12}$ d) $\frac{71\pi}{18}$ e) $\frac{7\pi}{4}$ f) $\frac{4\pi}{3}$
2. a) 105° b) 240° c) 810° d) 315° e) 165° f) 310°

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

1. $\frac{5-\sqrt{2}}{2}$

3. a) $\left\langle -\sqrt{2}-2, \sqrt{2}-2 \right\rangle$ b) $\langle 1, 6\rangle$

Wykresy funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$

1. a) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -\pi, 0\rangle$, $\left\langle \pi, \frac{3}{2}\pi \right\rangle$, zaś malejąca w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$

   b) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

   c) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   d) $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

   e) $-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

   f) $\left\langle -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi \right\rangle$

2. wartość dodatnią
3. liczba jest dodatnia

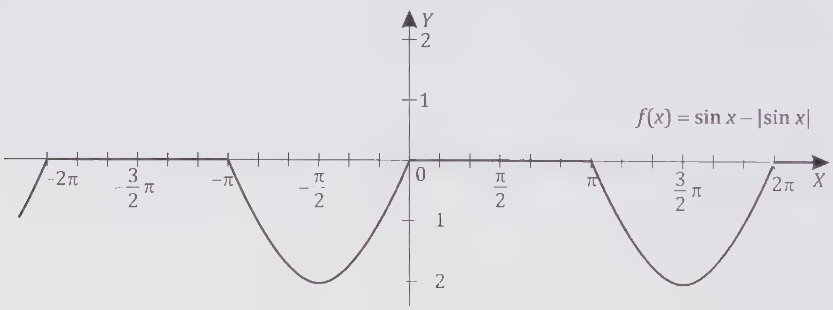
Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$

1. a) $-\frac{5}{6}\pi$ oraz $\frac{\pi}{6}$ b) $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$ c) wyrażenie jest dodatnie

Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych

1. a) $x \in \left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$ b) $x \in \left\langle -\frac{3}{2}\pi, -\pi \right) \cup (0, \pi)$

2.



   a) $ZW_f = \langle -2, 0\rangle$

   b) $\{x\colon x \in \langle 2\pi k, \pi + 2\pi k\rangle, k \in \mathbf{C}\}$

   c) $T_0 = 2\pi$

   d) $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{C}$

Proste równania trygonometryczne

1. a) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$ b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

   c) $x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$ d) równanie sprzeczne

   e) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

   f) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

   g) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$ h) $x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$ i) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

2. cztery rozwiązania
3. a) $m \in \langle -5, 3 \rangle$ b) $m \in \left\langle -\frac{1}{3}, 1 \right\rangle$

   c) $m \in \langle \sqrt{3} - 1, 3 - \sqrt{3} \rangle$ d) $m \in \left\langle -2\frac{2}{3}, -2 \right) \cup \left(-1, -1\frac{1}{3} \right\rangle$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy

1. a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

2. a) $-4\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$ b) $4\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$

Równania trygonometryczne

1. a) $x = -\frac{7}{24}\pi + k\pi$ lub $x = -\frac{1}{24}\pi + k\pi, k \in \boldsymbol{C}$ b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \boldsymbol{C}$

   c) $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \boldsymbol{C}$ d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \boldsymbol{C}$

2. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

   b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

   c) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

   d) $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$

Nierówności trygonometryczne

1. a) $x \in \left\langle \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle,\ k \in \boldsymbol{C}$

b) $x \in \left(-\frac{5}{3}\pi, -\frac{4}{3}\pi\right) \cup \left(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi + k\pi, \pi + k\pi\right), \quad k \in C$

d) $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$

2. $x \in \left\langle\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right\rangle, \quad k \in C$

Matematyka w liceum i w technikum zgodna z podstawą programową obowiązującą od września 2012 roku:

- uczy ścisłego myślenia
- sprzyja samodzielnej pracy ucznia
- daje podstawy języka potrzebnego do nauki przedmiotów przyrodniczych.

Seria zawiera: program, podręczniki, zbiory zadań i materiały pomocnicze dla nauczycieli.

Program nauczania oraz materiały pomocnicze można pobrać z naszej strony internetowej.

MAR2

Z GeoGebrą skuteczniej!

Interaktywne materiały opracowane w GeoGebrze, skorelowane z podręcznikami Oficyny, umożliwią ciekawszą i efektywniejszą pracę nauczycielom, którzy korzystają z naszych książek.

„Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro jest oficjalnym partnerem Międzynarodowego Instytutu GeoGebry oraz Warszawskiego Centrum GeoGebry przy SWPS”

dr Katarzyna Winkowska-Nowak
Prezes Warszawskiego Centrum GeoGebry

Trójwymiarowe modele przygotowane w programie Google SketchUp™ ułatwią i urozmaicą lekcje geometrii. Bryły przedstawione w naszych podręcznikach na płaskich rysunkach można oglądać i modyfikować jako obiekty przestrzenne.

Zapraszamy na naszą stronę internetową:
www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-090-9

9 788375 940909